ГЛАВА III

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

§3.1. Закон сохранения импульса

Импульсом материальной точки называется величина равная произведению массы на ее скорость, т.е.

$$\boxed{P = m \cdot V}. \tag{3.1}$$

Из определения следует, что вектор импульса направлен по вектору скорости $P \uparrow\uparrow V$. Импульс системы материальных точек равен

$$\boxed{P_c = \sum m_i \cdot V_i = m \cdot V_C}, \tag{3.2}$$

где $m = \sum_i m_i$ – масса системы точек, V_C – скорость центра масс.

Импульс тела находится методом разбиения на бесконечно малые части, при этом получается следующее соотношение:

$$P_T = \sum \Delta m_i \cdot V_i = \int V \cdot dm \,. \tag{3.3}$$

Закон изменения импульса материальной точки в инерциальной системе отсчета вытекает из второго закона Ньютона и имеет следующий вид[1]:

$$\boxed{\vec{dP} = \left(\sum_i \vec{F_i} \right) \cdot dt}, \tag{3.4}$$

где $\sum_i F_i$ – представляет собой сумму всех сил (как мер взаимодействия), действующих на материальную точку, dP, dt – дифференциалы (бесконечно малые изменения) вектора импульса и времени.

В неинерциальных системах отсчета, в закон изменения импульса материальной точки дополнительно входят силы инерции

$$\boxed{\vec{dP} = \left[\left(\sum_i \vec{F_i} \right) + \vec{F}_{пси} + \vec{F}_{кор} + \vec{F}_{цб} \right] \cdot dt}. \tag{3.5}$$

где $F_{пси}, F_{кор}, F_{цб}$ – поступательная сила инерции, сила Кориолиса и центробежная сила соответственно.

Для *средних значений сил* справедливо следующее соотношение:

$$\boxed{\Delta P = \left(\sum_i \langle F_i \rangle \right) \Delta t}, \tag{3.6}$$

где ΔP – изменение импульса точки, $\langle F_i \rangle$ – среднее значение силы.

Для системы материальных точек закон изменения импульса имеет вид

[1] В это выражение входят мгновенные значения сил.

$$\boxed{\vec{dP}_{\text{сист}} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{\text{внешн}} \cdot dt}, \qquad (3.7)$$

где выражение $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{\text{внешн}}$ представляет собой *сумму только внешних сил*, действующих на систему точек. Согласно уравнению (3.7*), импульс системы может изменяться под действием только внешних сил.* Третий закон Ньютона запрещает внутренним силам изменять импульс системы. Отсюда непосредственно вытекает **закон сохранения импульса***: импульс замкнутой системы частиц остаемся постоянным*, т.е. не меняется со временем

$$\boxed{\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i(t) = \overrightarrow{const}}. \qquad (3.8)$$

Сформулируем условия сохранения вектора импульса для незамкнутых систем.

1. Вектор импульса сохраняется и у незамкнутой системы, при условии, что сумма всех внешних сил равна нулю, т.е. $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{\text{внешн}} = \mathbf{0}$.

2. Если время взаимодействия является бесконечно малой величиной ($dt \to 0$), а внешние силы являются конечной величиной, то произведение суммы внешних сил на время взаимодействия является также бесконечно малой величиной, т.е. $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{\text{вн}} \cdot dt \to 0 \Rightarrow \vec{dP} \to \vec{0}$. Это приводит к сохранению вектора импульса системы точек. Примером могут служить выстрелы, разрывы снарядов и.т.д. Важно помнить, что в данном случае импульс системы постоянен только в течение времени взаимодействия dt.

У незамкнутых систем может сохраняться не сам вектор импульса $\vec{P}$, а его проекция P_x на некоторое направление. Рассмотрим такие случаи:

1. Проекция вектора импульса на некоторое направление OX сохраняется со временем в том случае, когда сумма проекций внешних на это направление OX равна нулю, т.е. $\left(\sum_i F_{ix}\right)_{\text{внешн}} = \mathbf{0}$. Заметим, что ось OX перпендикулярна равнодействующей внешних сил.

2. Проекция вектора импульса сохраняется со временем, если время взаимодействия является бесконечно малой величиной ($dt \to 0$), а сумма проекций внешних сил являются конечной величиной. В этом случае, произведение суммы проекций внешних сил на время взаимодействия является также бесконечно малой величиной. Важно помнить, что в данном случае проекция импульса системы постоянна только в течение времени взаимодействия dt.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая величина называется вектором импульса материальной точки? Куда направлен вектор импульса точки?

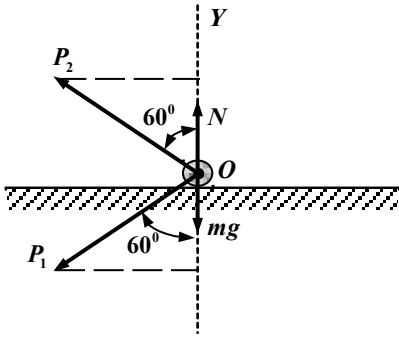
2. Сформулируйте закон изменения импульса материальной точки для инерциальных систем отсчета.
3. Дайте определения импульса системы материальных точек.
4. Сформулируйте закон изменения импульса системы материальных точек для инерциальных систем отсчета. Какие силы необходимо учитывать в неинерциальных системах отсчета?
5. Какая система материальных точек является замкнутой?
6. В каких случаях сохраняется вектор импульса системы? Приведите примеры.
7. В каких случаях сохраняется проекция вектора импульса системы?

Примеры решения задач

Пример 1. *Мяч массой* $m = 100\ г$, *летевший со скоростью* $|V_1| = 20\ м/с$, *ударился о горизонтальную поверхность. Угол (угол между направлением вектора скорости и перпендикуляром к плоскости) равен* 60^0. *Продолжительность удара равна* $\Delta t = 0{,}01\ с$. *Найти изменение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения. Найти величину средней силы нормального давления мяча на поверхность.*

Решение. *Изобразим на рисунке вектор импульса мяча до и после столкновения, а также силы, действовавшие на мяч во время удара. Вектор изменения импульса равен разности векторов* $\vec{P}_2$ *и* $\mathbf{P_1}$, *т.е.:*

$$\Delta P = P_2 - P_1. \qquad (1)$$



На мяч во время столкновения действуют две силы; сила тяжести mg *и сила реакции* $\mathbf{N}$. *Вектор изменения импульса мяча* ΔP *направлен по сумме сил* $N + mg$, *т.е. вектор* ΔP *перпендикулярен горизонтальной плоскости. Проведем ось OY перпендикулярно горизонтальной плоскости. Для векторного равенства (1) запишем равенство для проекций векторов, входящих в это равенство:*

$$\Delta P_y = P_{2y} - P_{1y} = P_2 \cdot \cos 60^0 - \left(-P_1 \cdot \cos 60^0\right) = P_2 \cdot \cos 60^0 + P_1 \cdot \cos 60^0.$$

Так как удар мяча о горизонтальную поверхность упругий, то величина импульса мяча до столкновения равна величине импульса мяча после столкновения, т.е. $\mathbf{P_1 = P_2 = m \cdot V_1}$. *С учетом этого соотношения предыдущее равенство примет вид:*

$$\Delta P_y = m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 + m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 = 2 \cdot m \cdot V_1 \cdot \cos 60^0 .$$

В последнее равенство подставим численные данные, получим величину проекции изменения импульса на ось OY:

$$\Delta P_y = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 20 \cdot \cos 60^0 = 2\ кг \cdot м/с .$$

Проекция вектора изменения импульса имеет положительный знак, следовательно, направление вектора ΔP *совпадает с направлением оси OY, т.е. вектор изменения импульса мяча направлен вертикально вверх.*

Запишем закон изменения импульса мяча во время удара:

$$\Delta P = (N + mg) \cdot \Delta t. \qquad (2)$$

Чтобы найти величину силы реакции, спроектируем векторное равенство (2) на ось OY, получим следующее соотношение:

$$\Delta P_y = (N_y + m \cdot g_y) \cdot \Delta t = (N - m \cdot g) \cdot \Delta t. \qquad (3)$$

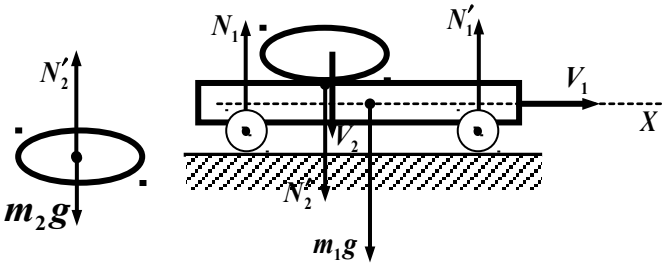
Из равенства (3) выразим силу реакции, получим соотношение:

$$N = \frac{\Delta P_y}{\Delta t} + m \cdot g = \frac{2}{0{,}1} + 0{,}1 \cdot 9{,}81 \approx 21\ Н .$$

По третьему закону Ньютона величина силы реакции равна величине силы нормального давления мяча на горизонтальную поверхность.

Пример 2. *На вагонетку массой* $m_1 = 800\ кг$, *движущуюся по горизонтальному пути со скоростью* $V_1 = 0{,}2\ м/с$, *насыпали сверху щебень массой* $m_2 = 200\ кг$. *Найти изменение скорости движения вагонетки.*

Решение. *На щебень во время удара* Δt *действовали следующие силы: сила тяжести* $m_2 g$ *и сила реакции поверхности вагонетки* N_2. *На вагонетку в этот промежуток времени действовали следующие силы: сила тяжести* $m_1 g$, *силы реакции горизонтальной поверхности рельс* N_1, N_1', *и, кроме того, сила нормального давления щебня на поверхность вагонетки* N_2'.



Изобразим на отдельных рисунках данные силы. Для рассматриваемой механической системы «щебень-вагонетка» силы N_2 *и* N_2' *являются внутренними, и, следовательно, эти силы не изменяют импульса данной системы. Силы* $m_1 g, N_1, N_1', m_2 g$ *являются внешними.*

Запишем закон изменения импульса системы «щебень-вагонетка»:

$$\Delta P_{системы} = \left(m_1 g + N_1 + N_1' + m_2 g\right) \cdot \Delta t . \qquad (1)$$

Изобразим на рисунке вектор скорости вагонетки до падения щебня и вектор скорости щебня в момент удара. Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по скорости движения вагонетки V_1.

Запишем для векторного равенства (1) равенство для проекций на ось OX векторов, входящих в это равенство, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + N_{1x} + N_{1x}' + m_2 g_x\right) \cdot \Delta t . \qquad (2)$$

Из рисунка видно, что векторы сил $m_1 g, N_1, N_1', m_2 g$ *направлены перпендикулярно оси OX, и, следовательно, проекции векторов этих сил на эту ось будут равны нулю, т.е.*

$$m_1 g_x = 0, m_2 g_x = 0, N_{1x} = 0, N_{1x}' = 0 .$$

С учетом этих равенств выражение (2) преобразуется к следующему виду:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = 0 .$$

Из данного равенства видно, что, хотя рассматриваемая система «щебень-вагонетка» не является замкнутой, проекция импульса этой системы на ось OX не изменяется в течение времени удара щебня о поверхность вагонетки. В системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, импульс системы до удара равен $m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$, *соответственно после удара импульс системы равен* $\left(m_1 + m_2\right) \cdot V$, *где* V — *вектор скорости системы «щебень-вагонетка» после удара.*

Найдем вектор изменения импульса системы:

$$\Delta P_{системы} = \left(m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2\right) - \left(m_1 + m_2\right) \cdot V .$$

Спроектировав это равенство на ось OX, получим

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 \cdot V_{1x} + m_2 \cdot V_{2x}\right) - \left(m_1 + m_2\right) \cdot V_x = 0. \qquad (3)$$

Учитывая, что проекция вектора скорости щебня в момент удара на ось OX равна нулю ($V_{2x} = 0$), преобразуем равенство (3) к следующему виду:

$$m_1 \cdot V_1 - \left(m_1 + m_2\right) \cdot V = 0. \qquad (4)$$

Из равенства (4) выразим величину скорости системы после удара:

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_{2\,1}} \cdot V_1.$$

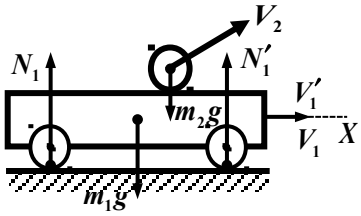
Изменение величины скорости вагонетки за время удара найдем по формуле:

$$\Delta V = V - V_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot V_1 - V_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) \cdot V_1.$$

Подставив цифровые данные, найдем величину ΔV:

$$\Delta V = \left(\frac{200}{200 + 800} - 1\right) \cdot 0{,}2 = -0{,}16 \text{ м/с}.$$

Пример 3. *На железнодорожной платформе, движущейся горизонтально со скоростью $V_1 = 7{,}2$ км/ч, установлено орудие, ствол которого расположен в сторону движения платформы под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Из орудия произвели выстрел, после чего скорость платформы стала равна $V_1' = 3{,}6$ км/ч. Пренебрегая силами трения, найти скорость снаряда, если масса снаряда равна $m_2 = 10$ кг, масса платформы с орудием $m_1 = 1000$ кг. Массой и импульсом пороховых газов пренебречь.*



Решение. *Изобразим только внешние силы, действующие на платформу, и снаряд во время выстрела. На снаряд действует только сила тяжести $m_2 g$. На платформу вместе с орудием действуют силы: сила тяжести $m_1 g$, силы реакции горизонтальной поверхности рельс N_1 и N_1'. Запишем закон изменения импульса для системы «снаряд — платформа»:*

$$\Delta P_{системы} = \left(\sum F_i\right)_{внешних} \cdot \Delta t = \left(m_1 g + N_1 + N_1' + m_2 g\right) \cdot \Delta t \qquad (1)$$

где $\Delta t -$ время выстрела

Заметим, что, вследствие действия сил давления пороховых газов, рассматриваемая система не является замкнутой, поскольку сумма сил ($m_1 g + N_1 + N_1' + m_2 g$) не равна нулю.

Однако в течение времени выстрела направление сил $m_1 g$, N_1, N_1', $m_2 g$ не изменяется. Поэтому выбираем ось OX по направлению движения платформы, и, спроектировав равенство (1) на эту ось, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + N_{1x} + N_{1x}' + m_2 g_x\right) \cdot \Delta t. \qquad (2)$$

Проекции сил $m_1 g$, N_1, N_1', $m_2 g$ на ось OX равны нулю. С учетом этого равенство (2) примет вид

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = 0. \qquad (3)$$

Данное равенство гласит, что, хотя рассматриваемая система «снаряд — платформа» не является замкнутой, однако проекция вектора импульса системы на ось OX до выстрела будет равна проекции вектора импульса этой системы после выстрела.

Выразим в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, вектор импульса системы до и после выстрела через массу тел и их скорости:

$$P_1 = (m_1 + m_2) \cdot V_1; \qquad P_2 = m_1 \cdot V_1' + m_2 \cdot V_2,$$

где P_1, P_2 – *соответственно вектор импульса системы до и после выстрела;* V_1 – *скорость платформы до выстрела;* V_1' – *скорость платформы после выстрела;* V_2 – *скорость снаряда сразу после выстрела.*

С учетом записанных соотношений равенство (3) примет вид

$$(\Delta P_{системы})_x = P_{2x} - P_{1x} = (m_1 \cdot V_{1x}' + m_2 \cdot V_{2x}) - (m_1 + m_2) \cdot V_{1x} = 0. \qquad (4)$$

Определив проекции скоростей тел до и после выстрела и подставив в равенство (4), получим следующее уравнение:

$$(m_1 \cdot V_1' + m_2 \cdot V_2 \cdot \cos 30^0) - (m_1 + m_2) \cdot V_1 = 0. \qquad (5)$$

Из данного уравнения находим выражение для скорости снаряда:

$$V_2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_1 - m_1 \cdot V_1'}{m_2 \cdot \cos 30^0}. \qquad (6)$$

Подставив численные значения величин, входящих в уравнение (6), найдем величину скорости снаряда после выстрела:

$$V_2 = \frac{(1000 + 10) \cdot 2 - 1000 \cdot 1}{10 \cdot \cos 30^0} \approx 118 \text{ м/с}.$$

§3.2. Работа и мощность

Изменение механического движения тела и, следовательно, его механической энергии происходит под действием на него других тел. Мерой этого действия являются силы, а мерой изменения энергии тела является работа, совершаемая силами.

Работой, совершаемой силой $\boldsymbol{F}$ на бесконечно малом перемещении[2] $\boldsymbol{dS}$ называется величина равная

$$dA = |F| \cdot |dS| \cdot \cos\alpha = F \cdot dS, \qquad (3.9)$$

где α – угол между вектором силы и вектором перемещения, $F \cdot dS$ – скалярное произведение вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения.

Следует заметить, что под перемещением $\boldsymbol{dS}$ понимается перемещение в общем случае точки приложения силы, а не перемещение тела.

Величина работы в системе СИ измеряется в Джоулях.

Работа, совершаемая силой на криволинейном участке траектории, вычисляется по формуле

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dS}. \qquad (3.10)$$

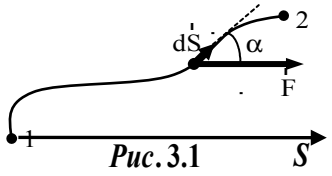


Рис. 3.1

Если для вычисления данного криволинейного интеграла выбрана прямоугольная декартова система координат, то, используя известную математическую формулу вычисления скалярного произведения векторов, справедливо следующее выражение:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x \cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y \cdot dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z \cdot dz, \qquad (3.11)$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) – координаты начальной и конечной точки соответственно.

Суммируя (интегрируя) выражение (3.10) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, находим работу силы $\boldsymbol{F}$ на данном перемещении.

Выражению (3.10) можно придать наглядный геометрический смысл. Работа на пути от точки 1 до точки 2 равна площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью $\boldsymbol{S}$. При этом площадь фигуры над осью $\boldsymbol{S}$ берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью $\boldsymbol{S}$ – со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мощности. *Среднее значение мощности* равно отношению величины работы ко времени ее совершения, т.е.

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \times \vec{S}}{\Delta t} = \frac{|\vec{F}| \times |\vec{S}| \times \cos\alpha}{\Delta t} = |\vec{F}| \times \langle |\vec{V}| \rangle \times \cos\alpha, \qquad (3.12)$$

где $|\mathbf{F}|$ – величина вектора силы, $|\mathbf{S}|$ – модуль вектора перемещения, α – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{S}$, $\langle |\mathbf{V}| \rangle$ – длина вектора средней скорости точки.

---

[2] Вектор $\vec{dS}$ должен быть настолько малым, что на всем его протяжении вектор силы $\vec{F}$ не менялся ни по величине, ни по направлению.

Мгновенная мощность равна производной от работы по времени

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \times \vec{V} = |\vec{F}| \cdot |\vec{V}| \cos s \quad , \qquad (3.13)$$

где $\vec{F}, \vec{V}$ – мгновенные значения вектора силы и вектора скорости.

Величина мощности в системе СИ измеряется в Ваттах.

Для успешного решения задач по данной теме следует придерживаться следующих методических рекомендаций:

1. В том случае, когда известны величина силы и перемещения, а также угол между ними, необходимо использовать формулу (3.9) для определения величины механической работы.
2. В других случаях, прежде чем приступить к решению задачи, необходимо установить все силы, действующие на рассматриваемое тело. Затем на рисунке показать эти силы.
3. Выяснить характер движения тела. Если оно движется равномерно, то величина искомой силы вычисляется с помощью первого закона Ньютона. Для равноускоренного движения величина искомой силы находится из второго закона Ньютона.
4. Затем, используя формулу (3.9), найти работу требуемой силы.
5. В том случае, когда вектор силы изменяется со временем, или траектория движения не является прямолинейной, для нахождения работы необходимо пользоваться соотношением (3.10).

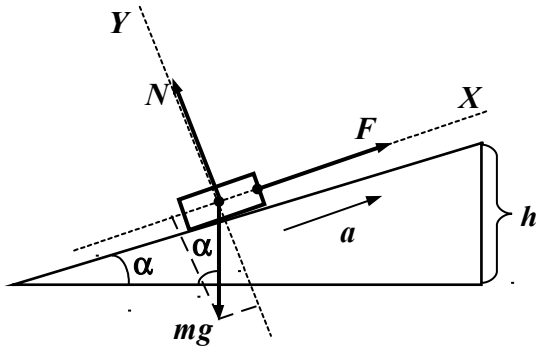
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение работы некоторой силы. Приведите соотношение, по которому вычисляется работа постоянной силы при поступательном движении твердого тела.
2. В каких единицах в системе СИ измеряется работа?
3. По какой формуле вычисляется работа переменной силы? Как это соотношение записывается в прямоугольной декартовой системе координат?
4. Дайте определение средней и мгновенной мощности. В каких единицах в системе СИ измеряется мощность?

Примеры решения задач

Пример 5. *Какую работу совершает сила* $F = 20\ Н$, *поднимая по наклонной плоскости груз массой* $m = 2\ кг$ *на высоту* $h = 2{,}5\ м$ *с ускорением* $a = 5{,}0\ м/с^2$. *Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.*

Решение. *На тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют следующие силы: сила тяжести* mg; *сила реакции* N *и сила* F. *Согласно условию задачи, движение*



тела является равноускоренным, поэтому вектор ускорения тела направлен по движению. Изобразим векторы сил на рисунке.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m \cdot a = F + N + mg .$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по ускорению движения тела, а ось OY — перпендикулярно поверхности наклонной плоскости. Спроектировав предыдущее векторное равенство на ось OX, получим следующее выражение:

$$m \cdot a = F - m \cdot g \cdot \sin \alpha . \qquad (1)$$

Из равенства (17.1) выражаем величину силы $\mathbf{F}$ *, получим соотношение:*

$$F = m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin \alpha . \qquad (2)$$

Воспользовавшись формулой для нахождения механической работы постоянной силы, и, используя равенство (2), получим выражение:

$$A = F \cdot S \cdot \cos 0^0 = \left(m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin \alpha\right) \cdot S , \qquad (3)$$

где $\mathbf{S}-$ *величина перемещения тела. В данной задаче величина перемещения, равная длине наклонной плоскости, связана с высотой наклонной плоскости соотношением:*

$$S = \frac{h}{\sin \alpha} . \qquad (4)$$

Подставим величину перемещения из равенства (4) в равенство (3), получим следующее соотношение для механической работы:

$$A = \left(m \cdot a + m \cdot g \cdot \sin \alpha\right) \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{m \cdot a \cdot h}{\sin \alpha} + m \cdot g \cdot h . \qquad (5)$$

В равенстве (5) остается пока неизвестной величина синуса угла наклонной плоскости. Данную величину находим из формулы (2) и, подставив в последнее равенство, получим окончательную формулу для вычисления механической работы:

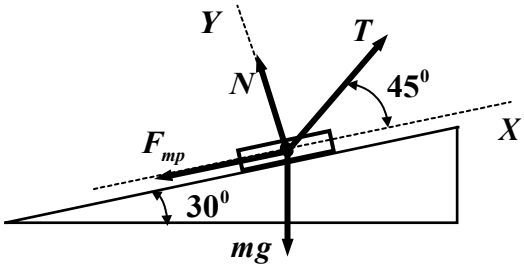
$$A = \frac{m \cdot a \cdot h}{\frac{F - m \cdot a}{m \cdot g}} + m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot a \cdot h \cdot m \cdot g}{F - m \cdot a} + m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{m \cdot a}{F - m \cdot a} + 1\right).$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину механической работы:

$$A = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5 \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{20 - 2 \cdot 5} + 1\right) \approx 98{,}1 \text{ Дж} .$$

Пример 6. *Ребенок перемещает санки массой* $m = 10$ *кг в гору под уклон* $\alpha = 30^0$ *к горизонту с постоянной скоростью* $V = 0{,}5$ *м/с на расстояние* $S = 20$ *м. Коэффициент трения полозьев о снег равен* $\mu = 0{,}1$*. Веревка образует с поверхностью горы угол* $\beta = 45^0$*. Определить мощность и работу силы натяжения веревки, необходимую для движения санок в указанных условиях.*

Решение. *На санки действуют тела с силами: Земля- с силой тяжести* mg*, наклонная плоскость с силой реакции* N*, веревка с силой натяжения* T *и наклонная плоскость с силой трения* F_{mp}*.*



Изобразим данные силы на рисунке. Запишем первый закон Ньютона в векторной форме:

$$T + F_{тр} + N + mg = 0 \qquad (1)$$

Спроектируем векторное равенство (1) на оси координат OX и OY, будем иметь следующие соотношения:

$$OX: \quad T \cdot \cos 45^0 - m \cdot g \cdot \sin 30^0 - F_{тр} = 0; \qquad (2)$$

$$OY: \quad T \cdot \sin 45^0 + N - m \cdot g \cdot \cos 30^0 = 0. \qquad (3)$$

Из равенства (.3) выражаем силу реакции и, подставим ее в формулу для силы трения $F_{тр} = \mu \cdot N$*, получим соотношение:*

$$F_{тр} = \mu \cdot \left(m \cdot g \cdot \cos 30^0 - T \cdot \sin 45^0\right). \qquad (4)$$

Подставив в равенство (2) вместо $F_{тр}$ *правую часть равенства (4), получим выражение:*

$$T \cdot \cos 45^0 - m \cdot g \cdot \sin 30^0 - \mu \cdot \left(m \cdot g \cdot \cos 30^0 - T \cdot \sin 45^0\right) = 0.$$

Из последнего выражения найдем величину силы натяжения и, подставив в формулу $N = T \cdot V \cdot \cos 45^0$*, получим формулу для вычисления мощности*

$$N = \frac{m \cdot g \cdot \sin 30^0 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^0}{1 + \mu \cdot tg\, 45^0} \cdot V.$$

В последнее выражение подставим числовые данные, найдем величину мощности силы натяжения:

$$N = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 30^0 + 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 30^0}{1 + 0{,}1 \cdot tg\, 45^0} \cdot 0{,}5 = 26\ Вт.$$

Работу силы натяжения находим из выражения:

$$A = T \cdot S \cdot \cos 45^0 = \frac{m \cdot g \cdot \sin 30^0 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos 30^0}{1 + \mu \cdot tg\, 45^0} \cdot S = 1040\ Дж.$$

§3.3. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Механическая энергия является мерой способности физической системы совершить работу, поэтому количественно энергия и работа выражаются в одних единицах. В системе СИ энергия измеряется в Дж. Различают два вида механической энергии: кинетическую и потенциальную энергии.

Введем понятие потенциальной энергии. Для некоторых сил величина работы зависит от длины траектории (пройденного пути), в этом случае силы называются *неконсервативными*. Если величина работы силы зависит от начального и конечного положения материальной точки, то в этом случае сила называется *консервативной*. К консервативным силам относятся: сила всемирного тяготения, сила тяжести, сила Кулона, сила упругости, если она описывается законом Гука, а также любая центральная сила [3].

Потенциальная энергия является мерой способности физической системы, на которую действует консервативная сила, совершить работу. Однако не для всех консервативных сил принято определять понятие потенциальной энергии. Предположим, что на материальную точку действует

---

[3] Сила ***F***, действующая на точку *P*, называется **центральной** с центром в точке *O*, если во всё время движения она действует вдоль линии, соединяющей точки *O* и *P*.

консервативная сила, тогда работа этой силы по криволинейному участку траектории вычисляется из соотношения:

$$A_{кон} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}) \Big|_{r_1}^{r_2} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1), \tag{3.14}$$

где $\Phi(r)$ – первообразная.

Потенциальная энергия системы, на которую действует консервативная сила, равна первообразной $\Phi(r)$ взятой с противоположным знаком:

$$\boxed{W_p(r) = -\Phi(r)}. \tag{3.15}$$

Из соотношения (3.15) следует, что *работа консервативной силы равна убыли*[4] *потенциальной энергии,* т.е.

$$\boxed{A_{конс} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p}, \tag{3.16}$$

где W_{p1}, W_{p2} – начальное и конечное значение потенциальной энергии, ΔW_p – изменение потенциальной энергии.

Вектор консервативной силы равен производной с противоположным знаком от потенциальной энергии в направлении перемещения dr, т.е.:

$$\boxed{\vec{F}_{конс} = -\frac{dW_{\to p}}{dr}}. \tag{3.17}$$

В прямоугольной декартовой системе координат равенство (3.17) имеет следующий вид:

$$\vec{F}_{конс} = -\left(\frac{\partial W_p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \cdot \vec{k} \right), \tag{3.18}$$

где $\frac{\partial W_p}{\partial x}$, $\frac{\partial W_p}{\partial y}$, $\frac{\partial W_p}{\partial z}$ – частные производные от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

Проекции вектора консервативной силы связаны с потенциальной энергией соотношениями

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}}. \tag{3.19}$$

Потенциальная энергия в поле сил гравитации вычисляется по формуле:

$$\boxed{W_p = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r}}, \tag{3.20}$$

где m_1, m_2 – массы бесконечно малых тел; r – расстояние между ними; G – гравитационная постоянная.

---

[4] Убылью величины x называется разность начального (x_1) и конечного (x_2) значений, т.е.: $убыль = x_1 - x_2$.

Потенциальная энергия в поле силы тяжести. Для материальной точки массой m, поднятой на высоту h над поверхностью Земли, потенциальная энергия вычисляется по формуле:

$$\boxed{W_p = m \cdot g \cdot h}. \qquad (3.21)$$

Для тел, размерами которых нельзя пренебречь, потенциальная энергия силы тяжести находится по формуле:

$$\boxed{W_p = m \cdot g \cdot h_{центра\ масс}}, \qquad (3.22)$$

где $h_{центра\ масс}$ – высота центра масс тела.

Потенциальная энергия сил упругости равна

$$W_p = \frac{k \cdot x^2}{2}, \qquad (3.23)$$

где k – коэффициент жесткости, x – величина деформации пружины.

Потенциальная энергия в поле сил Кулона находится из соотношения:

$$W_p = k \times \frac{q_1 \times q_2}{\varepsilon \times r}, \qquad (3.24)$$

где q_1, q_2 – величина точечных зарядов; r – расстояние между ними; k – постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

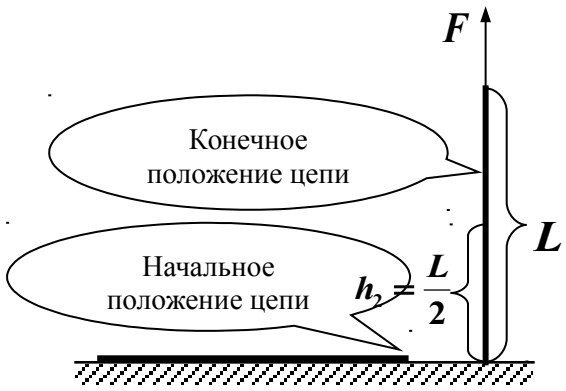
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения механической и потенциальной энергии. В каких единицах в системе СИ измеряется механическая энергия?
2. Какое соотношение устанавливает взаимосвязь убыли потенциальной энергии и работы консервативной силы?
3. Каким соотношением связаны вектор консервативной силы и величина потенциальной энергии?
4. По какой формуле рассчитывается потенциальная энергия материальной точки, на которую действует гравитационная сила?
5. По каким формулам вычисляется величина потенциальной энергии материальной точки и твердого тела, на которую действует сила тяжести?
6. По какой формуле вычисляется величина потенциальной энергии материальной точки, на которую действует сила упругости?

Примеры решения задач

Пример 7. *Цепь массой $m = 10\ кг$ и длиной $L = 1{,}5\ м$ лежит на горизонтальной поверхности пола. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы перевести ее в вертикальное положение, оторвав нижний конец от поверхности пола?*

Решение. *Для подъема цепи мы прикладываем такую величину внешней силы* $\boldsymbol{F}$ *, при которой цепь поднимается с минимальной скоростью. В этом случае кинетической энергией цепи можно пренебречь. Формулу (3.9) для определения работы силы* $\boldsymbol{F}$ *применять нельзя, так как при подъеме сила возрастает.*



Увеличение величины внешней силы связано с тем, что при подъеме цепи увеличивается масса цепи, оторвавшейся от горизонтальной поверхности. Поскольку подъем цепи совершается равномерно, то в любой момент времени величина внешней силы равна силе тяжести той части цепи, которая уже оторвалась от поверхности.

В данной задаче мы сталкиваемся с работой переменной силы. Выразим работу этой силы через работу силы тяжести. Найдем вначале работу силы тяжести через изменение потенциальной энергии:

$$A_{mg} = -\left(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1\right),$$

где $m \cdot g \cdot h_2 -$ *конечная величина потенциальной энергии цепи;* $m \cdot g \cdot h_1 -$ *начальная величина потенциальной энергии;* $h_2 -$ *высота центра масс поднятой цепи над горизонтальной поверхностью;* $h_1 -$ *высота центра масс цепи, лежащей на горизонтальной поверхности.*

Если пренебречь поперечными размерами цепи по сравнению с ее длиной, то в этом случае $h_1 = 0$*. С учетом этого имеем соотношение:*

$$A_{mg} = -m \cdot g \cdot h_2.$$

Поскольку в любой момент времени вектор внешней силы $\boldsymbol{F}$ *направлен против вектора силы тяжести поднятой части цепи и, кроме того, величины этих сил равны, то работа внешней силы равна работе силы тяжести, взятой с противоположным знаком, т.е.:*

$$A_F = -A_{mg} = m \cdot g \cdot h_2.$$

Учитывая, что высота центра масс однородной цепи равна половине ее длины, имеем окончательное равенство для определения работы внешней силы:

$$A_F = m \cdot g \cdot \frac{L}{2}.$$

Находим величину работы:

$$A_F = 10 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 73{,}5 \text{ Дж}.$$

§3.4. Кинетическая энергия. Терема об изменении кинетической энергии

Величина, которая характеризует способность движущейся точки (тела) совершать работу, называется кинетической энергией.

Для материальной точки кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$\boxed{W_k = \frac{m \cdot V^2}{2}}, \qquad (3.25)$$

где m – масса точки; V – ее скорость.

В системе СИ кинетическая энергия измеряется в *Дж.*

Кинетическая энергия системы материальных точек находится по следующей формуле:

$$\boxed{W_k = \sum_i \frac{m_i \cdot V_i^2}{2}}. \qquad (3.26)$$

Теорема об изменение кинетической энергии. Бесконечно малое изменение кинетической энергии частицы на бесконечно малом перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на нее

$$\boxed{dW_k = \delta A_1 + \delta A_2 + \ldots + \delta A_n = \sum_i \delta A_i}. \qquad (3.27)$$

Конечное изменение кинетической энергии точки равно сумме работ всех сил, действующих на нее

$$\boxed{\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_i A_i}. \qquad (3.28)$$

Заметим, что выражения (3.27) и (3.28) справедливы в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В неинерциальной системе отсчета кроме сил, действующих на рассматриваемую частицу со стороны каких-либо тел (сил взаимодействия), необходимо учитывать и силы инерции.

В тех случаях, когда возникает необходимость использовать теорему об изменении кинетической энергии, требуется соблюдать следующие методические рекомендации:

1. Изобразить все силы, действующие на материальную точку или тело, после чего записать теорему об изменении кинетической энергии с учетом конкретных сил, действующих на тело или материальную точку.

2. Изобразить на рисунке вектор перемещения. Используя условие задачи, выяснить, работа каких сил равна нулю (работа силы равна нулю в том случае, когда вектор силы перпендикулярен перемещению). С учетом этого упростить записанное выражение для изменения кинетической энергии.

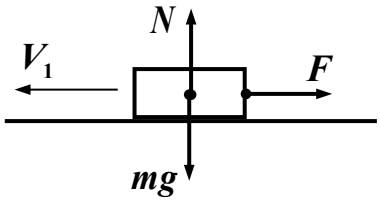
Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение кинетической энергии. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия материальной точки?
2. В каких единицах в системе СИ измеряется кинетическая энергия?
3. По какой формуле вычисляется кинетическая энергия системы материальных точек?
4. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии частицы для бесконечно малых перемещений.

5. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии частицы для конечных участков траекторий.

Примеры решения задач

Пример 8. *На тело массой* $m = 1\ кг$*, движущееся по горизонтальной поверхности со скоростью* $V_1 = 1{,}0\ м/с$*, начала действовать постоянная сила, направленная противоположно скорости тела. Найти работу этой силы к моменту времени, когда величина скорости тела после изменения направления будет в два раза больше первоначальной.*



Решение. *На тело, движущееся по горизонтальной поверхности, действуют следующие силы: сила тяжести* mg*, сила реакции* N *и внешняя сила* F*. Изобразим эти силы на рисунке.*

Запишем выражение для изменения кинетической энергии тела

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_F, \qquad (1)$$

где $\frac{m \cdot V_2^2}{2}$ *– конечная кинетическая энергия тела;* $\frac{m \cdot V_1^2}{2}$ *– начальная кинетическая энергия тела;* A_{mg} *– работа силы тяжести;* A_N *– работа силы реакции;* A_F *– работа внешней силы. Работа силы тяжести и силы реакции равна нулю, так как угол между векторами этих сил и вектором перемещения равен* 90^0*.*

С учетом того, что $V_2 = 2 \cdot V_1$*, равенство (1) примет вид:*

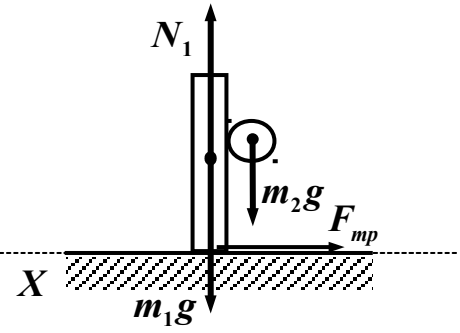
$$\frac{m \cdot (2 \cdot V_1)^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = A_F \Rightarrow A_F = \frac{m \cdot V_1^1}{2}.$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее равенство, найдем величину работы внешней силы:

$$A_F = \frac{1{,}0 \cdot 1{,}0^2}{2} = 0{,}5\ Дж.$$

Заметим, что данную задачу можно решить с помощью второго закона Ньютона. Однако решение задачи в этом случае является достаточно громоздким, так как в этом случае нам бы пришлось вычислять величины перемещений тела до и после остановки. Попробуйте решить задачу данным способом самостоятельно.

Пример 9. *Фигурист массой* $m_1 = 60\ кг$*, стоящий на льду, ловит мяч массой* $m_2 = 0{,}5\ кг$*, летящий горизонтально со скоростью* $V_2 = 20\ м/с$*. На какое расстояние откатится фигурист с мячом, если коэффициент трения коньков о лед равен* $\mu = 0{,}05$*?*



Решение. *На фигуриста в момент столкновения с мячом действуют силы: сила тяжести* $m_1 g$*, сила реакции* N_1 *и сила трения* F_{mp}*. На мяч в момент столкновения действует сила тяжести* $m_2 g$*. Изобразим все внешние силы, действующие на*

механическую систему «фигурист – мяч». Запишем закон изменения импульса рассматриваемой системы в течение времени столкновения Δt *:*

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \left(m_1 g + m_2 g + N_1 + F_{mp}\right) \cdot \Delta t .$$

Спроектировав данное векторное равенство на ось OX, получим следующее равенство:

$$P_{2x} - P_{1x} = \left(m_1 g_x + m_2 g_x + N_x + F_{mpx}\right) \cdot \Delta t .$$

Векторы $m_1 g$, $m_2 g$ *и* N_1 *перпендикулярны оси OX, поэтому проекции этих векторов на эту ось равны нулю. С учетом этого получим равенство:*

$$P_{2x} - P_{1x} = -F_{mp} \cdot \Delta t .$$

Выразив величину конечного P_2 *и начального* P_1 *импульсов через массы тел и их скорости, и, подставив в предыдущее равенство, будем иметь соотношение:*

$$\left(m_1 + m_2\right) \cdot V - m_2 \cdot V_2 = -F_{mp} \cdot \Delta t ,$$

где $\left(m_1 + m_2\right) \cdot V$, $m_2 \cdot V_2$ *– соответственно величина конечного и начального импульса системы.*

Величина силы трения имеет конечное значение ($F_{mp} = \mu \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot g$*), а время взаимодействия мяча с фигуристом* Δt *бесконечно мало, поэтому импульсом силы трения (*$F_{mp} \cdot \Delta t$*) можно пренебречь.*

С учетом этого предположения из предыдущего равенства находим скорость системы после взаимодействия

$$V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot V_2 . \qquad (1)$$

Учитывая, что величина кинетической энергии системы в момент остановки равна нулю, запишем теорему об изменении кинетической энергии системы после взаимодействия:

$$\Delta W_k = \left(0 - \frac{\left(m_1 + m_2\right) \cdot V^2}{2}\right) = A_{F_{mp}} + A_{N_1} + A_{(m_1+m_2)\cdot g},$$

где $A_{F_{mp}}, A_{N_1}, A_{(m_1+m_2)\cdot g}$ *– соответственно работа силы трения, силы реакции и силы тяжести.*

Работа двух последних сил равна нулю, так как угол между направлением этих сил и направлением вектора перемещения равен 90^0 .

Учитывая, что $A_{F_{mp}} = F_{mp} \cdot S \cdot \cos 180^0 = -\mu \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot g \cdot S$ *, получим соотношение:*

$$-\frac{\left(m_1 + m_2\right) \cdot V^2}{2} = -\mu \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot g \cdot S .$$

Отсюда находим величину перемещения, пройденного фигуристом до остановки:

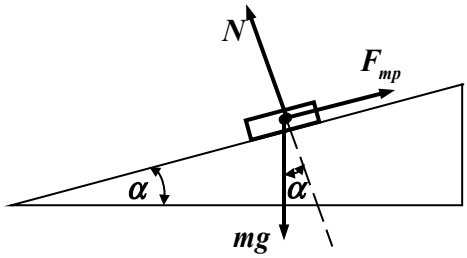
$$S = \frac{V^2}{2 \cdot \mu \cdot g}.$$

С учетом равенства (1) получим выражение для определения S *:*

$$S = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_1)^2} \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot \mu \cdot g} = \frac{0{,}5^2}{(60 + 0{,}5)^2} \cdot \frac{20^2}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}8} = 2{,}8 \cdot 10^{-2}\ м.$$

Пример 10. *С наклонной плоскости высотой* $h = 5\ м$ *и углом наклона* $\alpha = 30^0$ *начинает двигаться тело. Скорость тела в конце наклонной плоскости равна* $V_2 = 9\ м/с$ *. Найти коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью.*

Решение. *Изобразим на рисунке все силы, действующие на тело, движущееся по наклонной плоскости. Запишем выражение для изменения кинетической энергии за все время движения тела по наклонной плоскости:*



$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} - \frac{m \cdot V_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_{F_{mp}}. \quad (1)$$

где $V_1 -$ *скорость тела в начале спуска;* $V_2 -$ *скорость в конце наклонной плоскости.*

Работа силы реакции в данной задаче равна нулю, т.к. угол между вектором этой силы и вектором перемещения равен 90^0 *.*

По условию задачи, величина начальной скорости V_1 *равна нулю. Используя определение механической работы, найдем работу силы тяжести и силы трения скольжения:*

$$A_{mg} = m \cdot g \cdot S \cdot \cos(90^0 - \alpha) = m \cdot g \cdot S \cdot \sin\alpha,$$

где $S -$ *длина наклонной плоскости.*

Подставив полученные выражения для работ в равенство (1), получим следующее соотношение:

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot S \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot S \cdot \cos\alpha. \quad (2)$$

Учитывая, что $S = \frac{h}{\sin\alpha}$*, и проведя математические преобразования, получим выражение для изменения кинетической энергии тела:*

$$\frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot V_2^2}{2} = m \cdot g \cdot h - \mu \cdot m \cdot g \cdot h \cdot ctg\,\alpha \Rightarrow \frac{V_2^2}{2} = g \cdot h - \mu \cdot g \cdot h \cdot ctg\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{2 \cdot g \cdot h - V_2^2}{g \cdot h \cdot ctg\,\alpha} = \frac{2 \cdot g \cdot h - V_2^2}{g \cdot h} \cdot tg\,\alpha.$$

Подставив в последнее выражение числовые данные, найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 - 9^2}{9{,}8 \cdot 5} \cdot tg\, 30^0 = 0{,}2\,.$$

§3.5. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии

Полная механическая энергия точки (тела) равна сумме кинетической и потенциальной энергии

$$\mathbf{W = W_к + W_р}\,. \tag{3.29}$$

Теорема об изменении механической энергии. Изменение полной механической энергии материальной точки равно сумме работ всех неконсервативных сил действующих на эту точку, т.е.:

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = \sum A_{нк}}, \tag{3.30}$$

где $\Delta W = W_2 - W_1 -$ изменение механической энергии; $\sum A_{нк} -$ сумма работ неконсервативных сил.

Заметим, что выражение (3.30) справедливо в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В неинерциальной системе отсчета необходимо учитывать работы сил инерции.

Из данного утверждения следует, *что механическая энергия материальной точки не изменяется с течением времени, если сумма работ неконсервативных сил* $\sum A_{нк}$ *равна нулю.*

Условие $\sum A_{нк} = 0$ выполняется в следующих случаях:

1. *На материальную точку действуют только консервативные силы.*
2. *На материальную точку действуют консервативные и неконсервативные силы, однако сумма работ неконсервативных сил равна нулю*.

Аналогичное утверждение справедливо и для системы, состоящей из $\mathbf{n}$ материальных точек.

При решении задач с использованием соотношения (3.29) необходимо придерживаться следующих методических рекомендаций:

1. Изобразить все силы, действующие на тело или систему тел. Выяснить, какие из этих сил являются консервативными, а какие неконсервативными.
2. В том случае, когда на тело или систему тел действуют только консервативные силы, записать закон сохранения механической энергии.
3. При наличии неконсервативных сил необходимо выразить изменение механической энергии через алгебраическую сумму работ этих сил.

Вопросы для самоконтроля

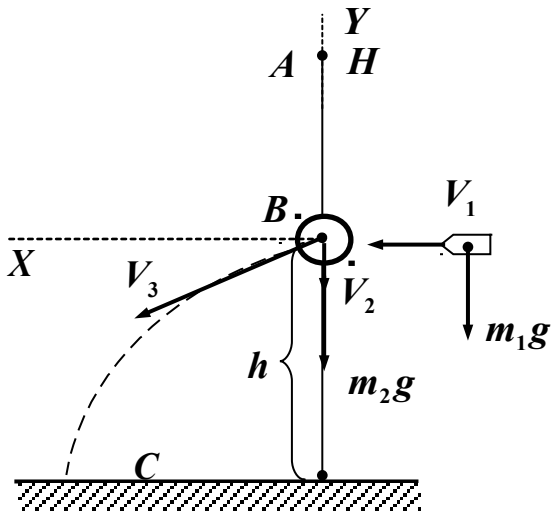
1. Дайте определение механической энергии.
2. В каких единицах в системе СИ измеряется механическая энергия?
3. Сформулируйте теорему об изменении механической энергии частицы.
4. Сформулируйте условия, при которых сохраняется механическая энергия частицы.

Примеры решения задач

Пример 11. *С высоты* $H = 40\ м$ *свободно падает шар массой* $m_2 = 0{,}1\ кг$. *Когда шар находится на высоте* $h_1 = 20\ м$, *в него попадает пуля, летящая горизонтально со скоростью* $V_1 = 100\ м/с$. *Масса пули* $m_1 = 0{,}01\ кг$. *Найти скорость шара при падении на землю, зная, что пуля застряла в нем. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

Решение. *На систему «шар — пуля» во время удара действуют внешние силы: сила тяжести шара* $m_2 g$ *и сила тяжести пули* $m_1 g$.

Запишем закон изменения импульса системы в течение времени столкновения Δt:



$$P_2 - P_1 = (m_1 g + m_2 g)\cdot \Delta t \qquad (1)$$

где P_1, P_2 *— начальный и конечный импульс системы соответственно.*

Предположим, что время столкновения является бесконечно малой величиной, т.е. $\Delta t \approx 0$. *Отсюда следует, что* $P_2 - P_1 = 0$.

Последнее равенство гласит, что импульс системы до и после взаимодействия одинаков, т.е. $P_2 = P_1$.

Обозначим скорость пули до взаимодействия V_1, *скорость шара до взаимодействия* V_2 *и скорость системы «шар — пуля» после взаимодействия* V_3.

Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = (m_1 + m_2)\cdot V_3, \qquad (2)$$

где $(m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2)$ *— импульс системы до взаимодействия,* $(m_1 + m_2)\cdot V_3$ *— импульс системы после взаимодействия.*

Спроектировав векторное равенство (2) на оси OX и OY, получим следующие соотношения:

$$OX:\ m_1 \cdot V_1 = (m_1 + m_2)\cdot V_{3_x},$$

$$\mathbf{OY:}\ -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{V}_2 = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2)\cdot \mathbf{V}_{3_y}. \qquad (3)$$

Выразив из полученных равенств $\mathbf{V}_{3_x}$, $\mathbf{V}_{3_y}$ *и, подставив в равенство* $\mathbf{V}_3 = \sqrt{\mathbf{V}_{3_x}^2 + \mathbf{V}_{3_y}^2}$, *получим соотношение:*

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{-m_2 \cdot V_2}{m_1 + m_2}\right)^2}. \qquad (4)$$

На участке АВ на шар действует только его сила тяжести $m_2 g$, *которая является консервативной, поэтому энергия шара на этом участке остается постоянной.*

Приравняем механическую энергию шара в точке A $(m_2 \cdot g \cdot H)$ *и механическую энергию шара в точке* B $\left(m_2 \cdot g \cdot h + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2}\right)$, *получим следующее равенство:*

$$m_2 \cdot g \cdot H = m_2 \cdot g \cdot h + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2}. \qquad (5)$$

Выразив из равенства (5) величину скорости V_2, *и, подставив в равенство (4), получим соотношение:*

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{m_1 \cdot V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}}{m_1 + m_2}\right)^2}. \qquad (6)$$

На участке траектории BC *на систему «шар — пуля» действует сила тяжести* $(m_1 + m_1) \cdot g$, *которая является консервативной, поэтому на этом участке выполняется закон сохранения механической энергии.*

Приравняв механическую энергию в точках B *и* C, *получим выражение:*

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h + \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_3^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot V_4^2}{2}, \qquad (7)$$

где V_4 *— скорость системы в момент падения на землю.*
Из данного равенства выразим скорость V_4:

$$V_4 = \sqrt{V_3^2 + 2 \cdot g \cdot h}. \qquad (8)$$

Подставив в равенство (8) вместо V_3 *правую часть соотношения (6), получим формулу для вычисления скорости системы в момент падения на землю:*

$$V_4 = \sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot V_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cdot [2 \cdot g \cdot (H - h)] + 2 \cdot g \cdot h}. \qquad (9)$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, получим следующее соотношение:

$$V_4 = \sqrt{\left(\frac{0{,}01}{0{,}01 + 0{,}1}\right)^2 \cdot 100^2 + \left(\frac{0{,}1}{0{,}01 + 0{,}1}\right)^2 \cdot [2 \cdot 9{,}8 \cdot (40 - 20)] + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 20}.$$

Из последнего выражения найдем величину скорости V_4:

$$V_4 = 28{,}3 \text{ м/с}.$$

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1
⊕⊕ ***Задача №1.*** Струя воды сечением $S = 6\ см^2$ ударяется о стенку под углом $\alpha = 60^0$ к нормали и упруго отскакивает от стенки без потери скорости. Найти силу, действующую на стенку, если известно, что скорость течения воды в струе $V = 12\ м/с$.
⊕⊕ ***Задача №2.*** Снаряд массой $10\ кг$ обладал скоростью $200\ м/с$ в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой $3\ кг$ получила скорость $400\ м/с$ и полетела вперед под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту. С какой скоростью и под каким углом к горизонту полетит большая часть снаряда.
⊕⊕ ***Задача №3.*** Автомобиль массой $2000\ кг$ движется в гору. Уклон горы равен $4\ м$ на каждые $100\ м$ пути. Коэффициент трения равен 8%. Найти: 1) работу, совершенную двигателем автомобиля на пути $3\ км$; 2) мощность, развиваемую двигателем, если известно, что этот путь был пройден за $4\ мин$.
⊕⊕ ***Задача №4.*** Шар массой $m_1 = 200\ г$, движущийся со скоростью равной $10\ м/с$, ударяет неподвижный шар массой $m_2 = 800\ г$. Удар центральный, абсолютно упругий. Каковы будут скорости после удара шаров?
⊕⊕ ***Задача №5.*** Два груза массами $m_1 = 10\ кг$ и $m_2 = 15\ кг$ подвешены на нитях длиной $L = 2\ м$ так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^0$ и отпущен. Определить высоту, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.