========== *ПРИЛОЖЕНИЕ* ==========

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ П.1. Понятие вектора. Сложение векторов

В механике различают величины скалярные и векторные. К скалярным величинам относятся: масса, энергия, механическая работа, температура и т.д.. К векторным величинам относятся: перемещение, скорость, ускорение, сила и т.д.. Величина, характеризующаяся только числовым значением, называется *скалярной*. *Векторная величина* опредеяется числовым значением и направлением. Геометрически вектор обозначается направленным отрезком (рис. П.1). Обозначают вектор как $\boldsymbol{a}$, а его длину — $|\boldsymbol{a}|$. Заметим, что длина

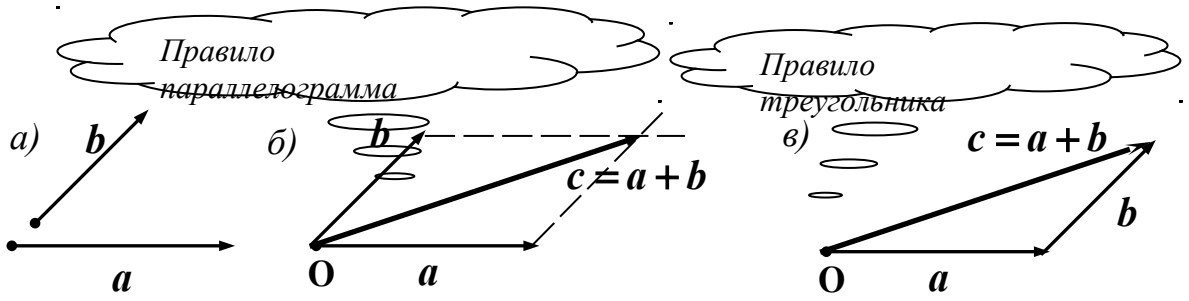

Рис. П.1

вектора всегда положительная величина.

При сложении двух векторов применяют два правила: правило параллелограмма и правило треугольника. Рассмотрим процедуру сложения двух векторов по правилу параллелограмма.

Пусть заданы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ такие, как показано на рис. 1,а. Найдем сумму этих векторов по правилу параллелограмма. Перенесем параллельно эти векторы в точку О так, чтобы начала этих векторов находились в точке О. Построим на этих векторах параллелограмм. Суммой $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ является диагональ этого параллелограмма, выходящая из точки О (см. рис.П.1,б).

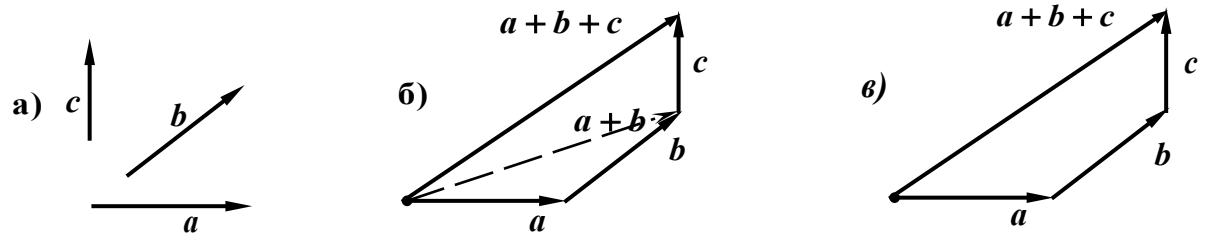

Рис. П.2

Для сложения заданных векторов $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *по правилу треугольника проведем следующие действия:* параллельно перенесем вектор $\boldsymbol{a}$ в точку О, затем в конец вектора $\boldsymbol{a}$ перенесем параллельно вектор $\boldsymbol{b}$ так, чтобы начало вектора $\boldsymbol{b}$ совпало с концом вектора $\boldsymbol{a}$. Вектор $\boldsymbol{c}$, проведенный из начала вектора $\boldsymbol{a}$ в конец вектора $\boldsymbol{b}$, является суммой векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

При наличии большего числа векторов их сумму находят по правилу многоугольника. Заметим, что правило многоугольника вытекает из поэтапного применения правила треугольника (см. рис. П.2,б). Сначала находят сумму векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, затем к полученному вектору $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ прибавляют $\boldsymbol{c}$, получают вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Из построения вытекает такое правило. *Если все векторы расположить так, что к концу первого вектора приставлено начало второго, к концу второго — начало третьего и т.д., то искомый результирующий вектор представляет собой направленный отрезок, проведенный из начала первого в конец последнего вектора (см. рис. П.2.в)*.

§ П.2. Вычитание векторов

Правило вычитания двух векторов можно получить путем сложения вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора $-\boldsymbol{b}$, являющимся обратным вектору $\boldsymbol{b}$. Проведя вышеуказанные действия над векторами $\mathbf{a}$ и $-\boldsymbol{b}$, приходим к следующему.

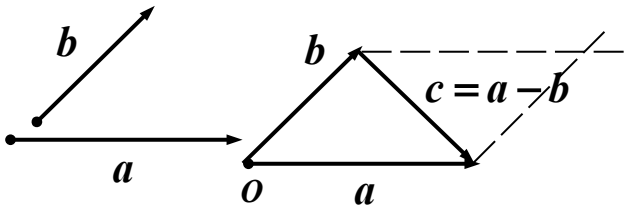

Рис. П.3

Чтобы вычесть вектор $\boldsymbol{b}$ из вектора $\boldsymbol{a}$, нужно эти векторы параллельно перенести в одну точку так, чтобы начала этих векторов совпадали, тогда вектор разности $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ представляет собой направленный отрезок, проведенный из конца вычитаемого вектора $\breve{\boldsymbol{b}}$ в конец уменьшаемого вектора $\boldsymbol{a}$ (см. рис. П.3).

§ П.3. Умножение вектора на число

При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\boldsymbol{k}$ получается некоторый вектор $\boldsymbol{c}$, направление которого совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$, если число $\boldsymbol{k}$ положительное; если число $\boldsymbol{k}$ отрицательное, то направление вектора $\boldsymbol{c}$ противоположно направлению исходного вектора $\boldsymbol{a}$, причем длина вектора $\boldsymbol{c}$ отличается от длины вектора $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{k}$ раз.

Если число $\boldsymbol{k}$ больше единицы, то длина вектора $\mathbf{c}$ больше длины исходного вектора $\boldsymbol{a}$, если число $\boldsymbol{k}$ меньше единицы, то длина вектора $\boldsymbol{c}$ меньше длины исходного вектора $\boldsymbol{a}$.

Важно помнить, что, умножая вектор на число, мы получаем вектор параллельный исходному вектору.

§ П.4. Составляющие вектора. Проекции вектора на оси координат

Любой вектор $\boldsymbol{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат можно представить в виде суммы трех векторов $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$, $\boldsymbol{a_z}$ (рис. 4). Операция замены вектора несколькими называется *разложением этого вектора на составляющие*. В этом случае векторы $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$, $\boldsymbol{a_z}$ *называются составляющими вектора* $\mathbf{a}$ вдоль оси OX, OY и OZ соответственно. При этом справедливо следующее векторное равенство:

$$\boldsymbol{a = a_x + a_y + a_z}. \qquad \text{(П. 1)}$$

Однако на практике довольно часто пользуются понятием проекций вектора на заданные направления. В этом случае вводят единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вдоль осей OX, OY и OZ соответственно (рис. П.4). *Единичным вектором (ортом)* называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор нужен для того, чтобы указать определенное направление в пространстве. Из рис. П. 4 видно, что составляющие $\mathbf{a_x}$, $\mathbf{a_y}$, $\mathbf{a_z}$ можно выразить через введенные единичные векторы следующим образом:

$$\boldsymbol{a_x = a_x \cdot i;\ \ a_y = a_y \cdot j;\ \ a_z = a_z \cdot k}, \qquad \text{(П.2)}$$

где $\boldsymbol{a_x, a_y, a_z}$ – есть некоторые числа, которые называются проекциями вектора $\mathbf{a}$ на направления, указанные единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, или проекциями на оси координат OX, OY и OZ соответственно.

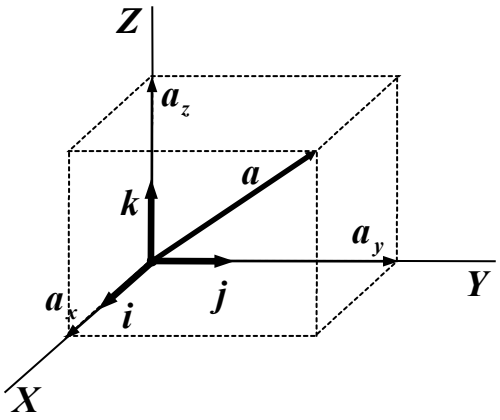

Рис. П.4

Таким образом, учитывая равенства (П.1) и (П.2), имеем:

$$\boldsymbol{a = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k}. \qquad \text{(П.3)}$$

Если известна длина вектора $|\boldsymbol{a}|$, *то проекции определяются как произведение его длины на косинус угла между вектором и положительным направлением оси OX, OY и OZ соответственно:*

$$\boldsymbol{a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\hat{\vec{a}, \vec{i}}\right),\quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\hat{\vec{a}, \vec{j}}\right),\quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\hat{\vec{a}, \vec{k}}\right)}. \qquad \text{(П.4)}$$

Проекции вектора равны разности координат начальной $\boldsymbol{(x_0, y_0, z_0)}$ и конечной точки $\mathbf{(x, y, z)}$, т.е.:

$$\boldsymbol{a_x = x - x_0,\ \ a_y = y - y_0,\ \ a_z = z - z_0}. \qquad \text{(П.5)}$$

Длина вектора $|\mathbf{a}|$ связана с его проекциями следующим соотношением:

$$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}}. \qquad \text{(П.6)}$$

§ П.5. Основное свойство векторных равенств

Пусть заданы три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{a}=a_x\cdot\boldsymbol{i}+a_y\cdot\boldsymbol{j}+a_z\cdot\boldsymbol{k}\quad \boldsymbol{b}=b_x\cdot\boldsymbol{i}+b_y\cdot\boldsymbol{j}+b_z\cdot\boldsymbol{k}\quad \boldsymbol{c}=c_x\cdot\boldsymbol{i}+c_y\cdot\boldsymbol{j}+c_z\cdot\boldsymbol{k}. \quad (\text{П.7})$$

Пусть вектор $\boldsymbol{d}$ связан с векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соотношением:

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}. \quad (\text{П.8})$$

Из равенств (П.7) вместо векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ подставим в равенство (П.8), получим следующее соотношение для вектора $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d}=\left(a_x\cdot\boldsymbol{i}+a_y\cdot\boldsymbol{j}+a_z\cdot\boldsymbol{k}\right)+\left(b_x\cdot\boldsymbol{i}+b_y\cdot\boldsymbol{j}+b_z\cdot\boldsymbol{k}\right)-\left(c_x\cdot\boldsymbol{i}+c_y\cdot\boldsymbol{j}+c_z\cdot\boldsymbol{k}\right). \quad (\text{П.9})$$

В равенстве (П.9) сгруппируем слагаемые по соответствующим единичным векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, получим выражение:

$$\boldsymbol{d}=\left(a_x+b_x-c_x\right)\cdot\boldsymbol{i}+\left(a_y+b_y-c_y\right)\cdot\boldsymbol{j}+\left(a_z+b_z-c_z\right)\cdot\boldsymbol{k}. \quad (10)$$

Выразим вектор $\boldsymbol{d}$ через его проекции на оси координат

$$\boldsymbol{d}=d_x\cdot\boldsymbol{i}+d_y\cdot\boldsymbol{j}+d_z\cdot\boldsymbol{k}. \quad (11)$$

Сравнивая выражения, стоящие при единичных векторах $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ в равенствах (П.10) и (П.11), получим следующие три соотношения для проекций векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$d_x=a_x+b_x-c_x,\quad d_y=a_y+b_y-c_y,\quad d_z=a_z+b_z-c_z. \quad (12)$$

Сравнивая соотношение (8) для векторов $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ с соотношениями (П.12) для проекций этих векторов на оси координат, делаем утверждение: *если некоторое равенство справедливо для векторов, то такие же равенства справедливы и для проекций этих векторов на соответствующие оси координат.*

Данное утверждение широко используется при решении тех физических задач, в которых необходимо применять векторные равенства.

§ П.6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается символом $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

Если обозначить угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через α, для скалярного произведения будем иметь:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\cdot\cos\alpha. \quad (\text{П.13})$$

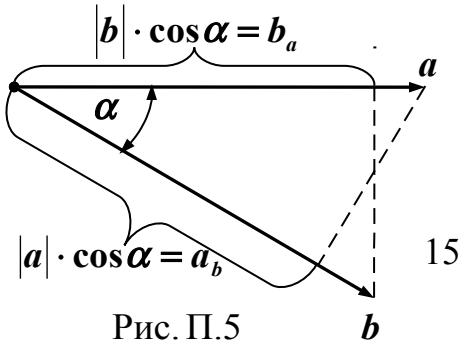

Рис. П.5

Из формулы (П.13) следует, что скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — это произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первого вектора (см. рис. П.5):

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_a=\boldsymbol{a}_b\cdot\boldsymbol{b}. \qquad (П.14)$$

Важно помнить, что скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, так как в этом случае $\cos\alpha=\cos 90^0=0$.

Пусть векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат в виде $\boldsymbol{a}=a_x\cdot\boldsymbol{i}+a_y\cdot\boldsymbol{j}+a_z\cdot\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=b_x\cdot\boldsymbol{i}+b_y\cdot\boldsymbol{j}+b_z\cdot\boldsymbol{k}$, тогда скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляется из следующего соотношения:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}. \qquad (П.15)$$

Приравняв правые части равенств (П.13) и (П.15), получим формулу для вычисления косинуса угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}. \qquad (П.16)$$

Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого числа λ справедливы равенства:

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (переместительный закон);
2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ (распределительный закон);
3. $\lambda\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\cdot\boldsymbol{b})$ (сочетательный закон).

§ П.7. Векторное произведение векторов

Пусть заданы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в прямоугольной декартовой системе координат $\boldsymbol{a}=a_x\cdot\boldsymbol{i}+a_y\cdot\boldsymbol{j}+a_z\cdot\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=b_x\cdot\boldsymbol{i}+b_y\cdot\boldsymbol{j}+b_z\cdot\boldsymbol{k}$, векторным произведением данных векторов является вектор $\boldsymbol{c}$, длина которого вычисляется по формуле

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\alpha=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\cdot\sin\alpha, \qquad (П.17)$$

где α – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение обозначается как $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ обладает следующими свойствами:

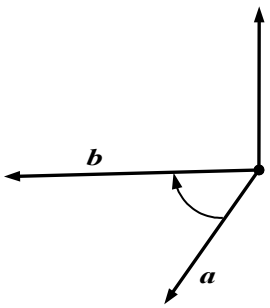

Рис. П.6

1. Вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
2. Направление вектора $\boldsymbol{c}$ определяется по правилу «буравчика». Буравчик вращаем от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$, тогда поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\boldsymbol{c}$.

Во многих задачах инженерии и физики нужно иметь возможность строить вектор,

перпендикулярный двум имеющимся — векторное произведение предоставляет эту возможность.

Векторное произведение полезно для «измерения» перпендикулярности векторов — длина векторного произведения двух векторов равна произведению их длин, если они перпендикулярны, и уменьшается до нуля, если векторы параллельны.

Для вычисления векторного произведения векторов можно использовать определитель матрицы

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k}.\end{aligned} \quad \text{(П.18)}$$

Для любых векторов a, b, c и любого числа λ справедливы равенства:

1. $a \cdot b = -b \cdot a$ (свойство анти коммутативности);
2. $\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b)$ (свойство ассоциативности относительно умножения на скаляр).
3. $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (свойство дистрибутивности);
4. $a \times (b \times c) = b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)$ (формула «БАЦ минус ЦАБ»)