

КИНЕМАТИКА

Введение

Раздел физики, изучающий различные виды механического движения, причины их возникновения, условия относительного покоя, называется *механикой*. Механика включает в себя такие подразделы, как: *кинематика*, *динамика*, *стати́ка*, *законы сохранения* и др. В кинематике для описания механического движения используется определенный математический аппарат, при этом причины возникновения движения тел не рассматриваются. В динамике, наоборот, при описании механического движения, прежде всего, рассматриваются причины возникновения движения. Статика изучает условия равновесия тел, на которые действуют другие тела. *Механическое движение* — изменение положения тела относительно некоторого другого тела с течением времени. Для описания движения используют систему отсчета, которая включает в себя тело отсчета, систему координат и устройство для определения времени, т.е. часы. Изучать движение начинают с движения материальной точки. *Материальная точка* — реальное тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях.

§1.1. Векторный способ описания движения

Положение движущейся материальной точки определяется уравнением:

$$\vec{r}(t) = \overline{f(t)}, \quad (1.1)$$

где \vec{r} — радиус вектор движущейся точки (см. рис.1.1).

Вектор перемещения соединяет начальное и конечное положение движущейся точки, и направлен от начального положения к конечному положению:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

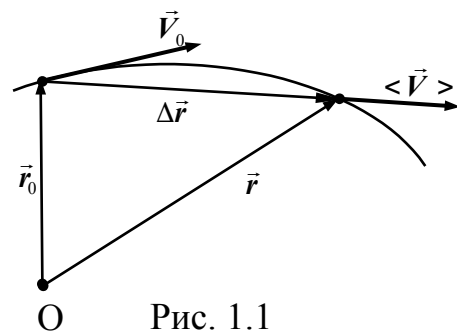


Рис. 1.1

Для характеристики быстроты движения вводится понятие средней и мгновенной скорости. Средняя скорость — отношение перемещения точки ко времени:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Так как $\Delta t > 0$, то вектор средней скорости всегда направлен по перемещению, т.е. $\langle \vec{v} \rangle \parallel \Delta\vec{r}$. Можно также ввести понятие средней путевой скорости движения. *Средней путевой скоростью движения точки*

называется отношение пройденного пути к интервалу времени Δt движения точки. Так как пройденный путь величина скалярная, то и средняя путевая скорость является скалярной величиной.

Предельное значение, к которому стремится вектор средней скорости при стремлении интервала времени Δt к нулю, называется мгновенной скоростью. Обозначение мгновенной скорости:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{V} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'_t. \quad (1.4)$$

Такие пределы в математике получили название производной, т.е. мгновенная скорость - это производная от перемещения по времени. Мгновенная скорость характеризует скорость тела в данной точке в данный момент времени. Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории движения.

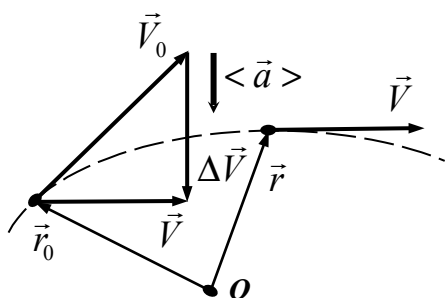


Рис. 1.2

Для характеристики быстроты изменения скорости вводят понятие ускорения движения. Средним ускорением называется отношение вектора изменения скорости к интервалу времени, в течение которого это изменение произошло, т.е.:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Так как $\Delta t > 0$, то вектор среднего ускорения всегда направлен по вектору изменения мгновенной скорости, т.е. $\langle \vec{a} \rangle \parallel \Delta \vec{V}$ (см. рис. 1.2). Предельное значение, к которому стремится вектор среднего ускорения при условии, что интервал времени Δt стремится к нулю, называется мгновенным ускорением.

Мгновенное ускорение — это производная от вектора скорости по времени. Мгновенное ускорение показывает, как быстро изменяется вектор скорости движущейся точки. Обозначение мгновенного ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}'_t. \quad (1.6)$$

Примеры векторных уравнений движения материальной точки

Равномерное прямолинейное движение ($\vec{V} = \overline{const}$):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}t. \quad (1.7)$$

Движение с постоянным ускорением ($\vec{a} = \overline{const}$):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}. \quad (1.8)$$

Зависимость скорости от времени при движении точки с постоянным ускорением имеет вид:

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t. \quad (1.9)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение механического движения.
2. Дайте определение материальной точки.
3. Каким образом определяется положение материальной точки в пространстве в векторном способе описания движения?
4. В чем сущность векторного метода описания механического движения? Какие характеристики используются для описания этого движения?
5. Дайте определения векторов средней и мгновенной скорости. Как определяется направление этих векторов?
6. Дайте определение векторов среднего и мгновенного ускорений.
7. Какое из соотношений является уравнением движения точки с постоянным ускорением? Какое соотношение определяет зависимость вектора скорости от времени?

Примеры решения задач

Пример 1. Радиус-вектор точки A относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r}(t) = c \cdot t \cdot \vec{i} + f \cdot t^2 \cdot \vec{j}$, где c и f - постоянные, \vec{i} и \vec{j} – орты осей X и Y . Найдите: а) уравнение траектории точки $y(x)$; б) зависимость от времени скорости \vec{v} , ускорения \vec{a} и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами \vec{a} и \vec{v} .

Решение. Выберем прямоугольную декартову систему координат XOY , начало координат совместим с началом вектора $\vec{r}(t)$. В этом случае для вектора $\vec{r}(t)$ справедливо соотношение

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}, \quad (1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – зависимости координат движущейся точки от времени.

Сравнивая выражение (1) с соотношением для $\vec{r}(t)$, заданным в условии задачи, имеем следующие выражения для координат $x(t)$, $y(t)$:

$$x(t) = c \cdot t, \quad y(t) = f \cdot t^2.$$

Из первого уравнения выражаем время и подставляем в уравнение для координаты $y(t)$, получим уравнение траектории материальной точки

$$y(x) = \frac{f}{c^2} \cdot x^2,$$

траекторией которого является парабола.

Для определения вектора мгновенной скорости воспользуемся соотношением (1.4)

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(c \cdot t \cdot \vec{i} + f \cdot t^2 \cdot \vec{j}) = c \cdot \vec{i} + 2 \cdot f \cdot t \cdot \vec{j}. \quad (2)$$

В прямоугольной декартовой системе координат для вектора скорости справедливо следующее соотношение:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j}, \quad (3)$$

где V_x , V_y – проекции вектора скорости на оси координат.

Сравнивая соотношения (2) и (3) для зависимостей проекции скорости от времени имеем соотношения:

$$V_x(t) = c, \quad V_y(t) = 2 \cdot f \cdot t. \quad (4)$$

Величину вектора скорости находим из следующего выражения:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{c^2 + (2 \cdot f \cdot t)^2} = \sqrt{c^2 + 4 \cdot f^2 \cdot t^2}. \quad (5)$$

Вектор мгновенного ускорения находим из соотношения (1.6)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(c \cdot \vec{i} + 2 \cdot f \cdot t \cdot \vec{j}) = 0 \cdot \vec{i} + 2 \cdot f \cdot \vec{j} = 2 \cdot f \cdot \vec{j}. \quad (6)$$

Для зависимостей проекций ускорения на оси координат имеем выражения:

$$a_x = 0, \quad a_y = 2 \cdot f. \quad (7)$$

Зная проекции вектора ускорения на оси координат, величину вектора ускорения находим по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + (2 \cdot f)^2} = 2 \cdot f. \quad (8)$$

Величина ускорения не зависит от времени, следовательно, точка совершает движение с постоянным ускорением, траекторией которого является парабола.

Для того чтобы найти зависимость от времени угла между векторами скорости и ускорения, запишем формулы для скалярного произведения этих векторов

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y, \text{ или } \vec{V} \cdot \vec{a} = |\vec{V}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \Rightarrow \cos\varphi = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{|\vec{V}| \cdot |\vec{a}|}.$$

С учетом соотношений (4), (5) и (7), (8) зависимость угла между векторами \vec{a} и \vec{V} примет вид

$$\varphi(t) = \arccos \frac{c \cdot 0 + (2 \cdot f \cdot t) \cdot (2 \cdot f)}{\sqrt{c^2 + 4 \cdot f^2 \cdot t^2} \cdot (2 \cdot f)} = \arccos \frac{4 \cdot f^2 \cdot t}{2 \cdot f \cdot \sqrt{c^2 + 4 \cdot f^2 \cdot t^2}}$$

Таким образом, задача решена полностью.

§1.2. Координатный способ описания движения

В координатном способе для описания движения выбирают систему координат (например, декартову). Начало отсчета жестко закрепляют с выбранным телом (телом отсчета). Пусть \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} единичные орты,

направленные в положительные стороны осей OX, OY и OZ соответственно. Положение точки задается координатами x, y, z .

Вектор мгновенной скорости определяется следующим образом:

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z, \quad (1.10)$$

где V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на оси координат, а $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – производные от координат по времени.

Длина вектора скорости связана с его проекциями соотношением:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.11)$$

Для вектора мгновенного ускорения справедливо соотношение:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z = \frac{dV_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dV_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dV_z}{dt} \vec{e}_z, \quad (1.12)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на оси координат, а $\frac{dV_x}{dt}, \frac{dV_y}{dt}, \frac{dV_z}{dt}$ – производные по времени от проекций вектора скорости.

Длина вектора мгновенного ускорения находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.13)$$

Примеры уравнений движения точки в декартовой системе координат

1. Равномерное прямолинейное движение ($\vec{V} = \overline{const}$):

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_x t \\ y(t) = y_0 + V_y t \\ z(t) = z_0 + V_z t \end{cases}. \quad (1.14)$$

2. Движение с постоянным ускорением ($\vec{a} = \overline{const}$):

Уравнения движения:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} \\ z(t) = z_0 + V_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2} \end{cases}. \quad (1.15)$$

Зависимости проекций вектора скорости на оси координат от времени:

$$\begin{cases} V_x(t) = V_{0x} + a_x \cdot t; \\ V_y(t) = V_{0y} + a_y \cdot t; \\ V_z(t) = V_{0z} + a_z \cdot t. \end{cases} \quad (1.16)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем сущность координатного способа описания движения?
2. Каким соотношением определяется вектор мгновенной скорости? По какой формуле вычисляется величина вектора скорости?
3. Каким соотношением определяется вектор мгновенного ускорения? По какой формуле вычисляется величина вектора мгновенного ускорения?
4. Какие соотношения называют уравнениями равномерного движения точки?
5. Какие соотношения называют уравнениями движения с постоянным ускорением? По каким формулам рассчитывают проекции мгновенной скорости точки на оси координат?

Примеры решения задач

Пример 2. Движения двух мотоциклистов заданы уравнениями $x_1(t) = 15 + t^2$ и $x_2(t) = 8 \cdot t$. Описать движение каждого мотоциклиста. Найти координаты и время встречи.

Решение. Под описанием движения в данной задаче подразумевается следующее. Исходя из заданного уравнения движения, необходимо определить начальную координату тела, проекции векторов его начальной скорости и ускорения на ось координат. Исходя из полученной информации, необходимо установить характер движения тела (равноускоренное, равнозамедленное или равномерное), а также направление движения (по оси OX или против оси OX).

Рассмотрим уравнение движения первого мотоциклиста. Из данного уравнения следует, что начальная координата равна $x_0 = 15 \text{ м}$. Проекция вектора начальной скорости имеет нулевое значение, так как в данном уравнении отсутствует слагаемое, содержащее t в первой степени ($V_{0x} = 0 \text{ м/с}$). Из данного уравнения определяем проекцию вектора ускорения на ось OX ($\frac{a_x}{2} \cdot t^2 = 1 \cdot t^2 \Rightarrow a_x = 2 \text{ м/с}^2$). Из того, что величина начальной скорости равна нулю, и того, что мотоциклист двигался с ускорением, делаем следующий вывод: мотоциклист двигался равноускоренно. Так как проекция вектора ускорения положительная и начальная скорость равна нулю, делаем вывод о том, что мотоциклист двигался по оси OX .

Рассмотрим движение второго мотоциклиста. Из уравнения его движения следует, что начальная координата равна нулю ($x_0 = 0 \text{ м}$), величина проекции ускорения на ось координат равна также нулю ($a_x = 0 \text{ м/с}^2$), так как в уравнении отсутствует слагаемое, содержащее t во второй степени. Проекция его скорости на ось OX равна $V_x = 8 \text{ м/с}$. Из полученной информации следует, что движение второго мотоциклиста является равномерным ($a_x = 0 \text{ м/с}^2$).

Поскольку проекция его скорости имеет положительный знак, то второй мотоциклист движется по оси OX . Из того, что заданы зависимости только одной координаты от времени вытекает то, что движение мотоциклистов является прямолинейным.

Определение координаты и времени встречи.

Требуемые величины можно определить, если учесть, что в момент встречи координаты мотоциклистов равны. Приравняв правые части уравнений движения мотоциклистов, получим следующее уравнение:

$$15 + t^2 = 8 \cdot t \Rightarrow t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0.$$

Решив данное квадратное уравнение, получим следующие корни:

$$t_1 = 3 \text{ с}, \quad t_2 = 5 \text{ с}.$$

Оба корня положительные, следовательно, эти мотоциклисты встретятся дважды. Найдем координаты встречи из уравнения движения второго мотоциклиста:

$$x_2(3) = 8 \cdot 3 = 24 \text{ м}, \quad x_2(5) = 8 \cdot 5 = 40 \text{ м}.$$

Пример 3. Движение мотоциклиста задано уравнением $x(t) = t^2 - 8 \cdot t + 15$. Найти пройденный путь мотоциклиста и его перемещение за первые 8 с движения. Найти среднюю путевую скорость и величину вектора средней скорости за первые 6 с движения.

Решение. Определение пройденного пути и перемещения.

В начале решения данной задачи необходимо выяснить, имело ли место в данном движении изменение направления движения мотоциклиста. Для этого найдем зависимость скорости движения мотоциклиста от времени. Из уравнения его движения определяем проекцию скорости на ось OX ($V_{0x} = -8 \text{ м/с}$) и проекцию вектора ускорения на эту ось ($\frac{a_x}{2} = 1 \Rightarrow a_x = 2 \text{ м/с}^2$). Записываем зависимость проекции скорости от времени:

$$V_x = V_{0x} + a_x \cdot t \Rightarrow V_x = -8 + 2 \cdot t.$$

Определяем момент времени, когда проекция скорости мотоциклиста на ось OX равна нулю, т.е.

$$V_x = 0 \Rightarrow -8 + 2 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ с}.$$

Таким образом, в момент времени $t = 4 \text{ с}$ имело место мгновенное изменение направления движения. Из уравнения движения мотоциклиста определяем его координаты в моменты времени $t = 0 \text{ с}$, $t = 4 \text{ с}$ и $t = 8 \text{ с}$:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0^2 - 8 \cdot 0 + 15 = 15 \text{ м}, & x(4) &= 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1 \text{ м}, \\ x(8) &= 8^2 - 8 \cdot 8 + 15 = 15 \text{ м}. \end{aligned}$$

Находим пройденные пути до и после мгновенной остановки по формулам:

$$L_1 = |x(4) - x(0)| = |-1 - 15| = 14 \text{ м}, \quad L_2 = |x(8) - x(4)| = |15 - (-1)| = 14 \text{ м}.$$

Вычислим пройденный путь за первые 8 с движения $L = L_1 + L_2 = 28 \text{ м}$.

Найдем величину проекции перемещения за первые 8 с движения мотоциклиста по формуле $S_x = x(8) - x(0) = 15 - 15 = 0 \text{ м}$. Таким образом, перемещение равно нулю.

Определение средней путевой и величины вектора средней скорости.

Найдем координату мотоциклиста в момент времени $t = 6 \text{ с}$.

$$x(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 15 = 3 \text{ м}.$$

Вычислим пройденный путь за 6 с движения по формуле:

$$L = L_1 + L_3 = 14 + |x(6) - x(4)| = 14 + |3 - (-1)| = 16 \text{ м}.$$

Определим величину средней путевой скорости движения:

$$V_{\text{ср.п.}} = \frac{L}{t} = \frac{16}{6} = 2,67 \text{ м/с.}$$

Найдем проекцию вектора перемещения на ось OX за 6 с движения:

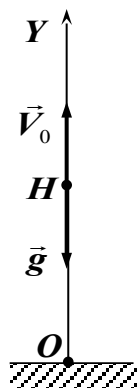
$$S_x = x(6) - x(0) = 3 - 15 = -12 \text{ м.}$$

Вычислим величину проекции вектора средней скорости движения мотоциклиста на ось OX по формуле:

$$V_{\text{ср.п.}} = \frac{S_x}{t} = \frac{-12}{6} = -2 \text{ м/с.}$$

Величина вектора средней скорости при этом равна $V_{\text{ср}} = 2 \text{ м/с}$.

Пример 4. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой скоростью $V_0 = 19,6 \text{ м/с}$ с промежутком времени $\Delta t = 0,5 \text{ с}$. Через какое время после начала движения второго тела и на какой высоте встретятся тела?



Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось OY была направлена вертикально вверх, начало координат совместим с поверхностью Земли. Координату точки бросания обозначим H . Изобразим в системе координат векторы начальной скорости и ускорения свободного падения. Возьмем два секундомера, первый секундомер включим в момент броска первого тела, второй секундомер — в момент броска второго тела. Показания первого секундомера обозначим через t_1 , а второго — через t_2 . Запишем уравнения движения тел в выбранных системах отсчета времени:

$$y_1(t_1) = H + V_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}; \quad y_2(t_2) = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}. \quad (1)$$

Приведем данные уравнения движения в единую систему отсчета времени. Требуется найти момент встречи по второму секундомеру. В уравнение движения первого тела вместо t_1 подставим $t_1 = t_2 + \Delta t$, получим следующие уравнения:

$$y_1(t_2) = H + V_0 (t_2 + \Delta t) - \frac{g (t_2 + \Delta t)^2}{2}; \quad y_2(t_2) = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}. \quad (2)$$

В момент встречи координаты тел совпадают, и, следовательно, приравняв правые части уравнений движения тел, получим уравнение для определения момента встречи:

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \Rightarrow H + V_0 (t_2 + \Delta t) - \frac{g (t_2 + \Delta t)^2}{2} = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}. \quad (3)$$

Решив данное уравнение, находим время встречи:

$$t_2 = \frac{V_0}{g} - \frac{\Delta t}{2} = \frac{19,6}{9,8} - \frac{0,5}{2} = 1,75 \text{ с}. \quad (4)$$

Зная время встречи, из уравнения движения второго тела находим координату встречи:

$$y_2(1,75) = H + 19,6 \cdot 1,75 - \frac{9,8 \cdot 1,75^2}{2} = H + 19,3. \quad (5)$$

Это значит, что координата точки встречи тел расположена на высоте 19,3 м выше точки бросания тел.

Пример 5. Тело, брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $V_0 = 10 \text{ м/с}$. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12,5$. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость $\langle V \rangle$ движения тела с момента бросания до момента падения на землю.

Решение. Пренебрегаем размерами тела, т.е. его движение рассматриваем как движение точки. Для решения задачи возьмем ось OY и направим ее перпендикулярно поверхности земли, начало отсчета (точка O) выберем на ее поверхности. Запишем общую зависимость для координат y от времени:

$$y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \quad (1)$$

Из рисунка определяем начальные параметры

$$y_0 = h; \quad V_{0y} = V_0 \cos 0^\circ = V_0; \quad g_y = g \cos 180^\circ = -g. \quad (2)$$

С учетом начальных условий (2) уравнение движения для данной задачи примет вид

$$y(t) = h + V_0 t - \frac{g t^2}{2} = 12,5 + 10t - 5t^2. \quad (3)$$

Определим максимальную координату y при движении тела вверх по оси OY , для этого найдем производную от правой части соотношения (3), и, приравняв полученное соотношение к нулю, получим следующее уравнение:

$$V_0 - g t = 0. \quad (4)$$

Из уравнения (4), находим момент времени, когда тело достигает максимальной высоты подъема. Затем определяем максимальную координату y_{\max}

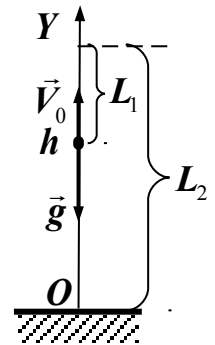
$$y_{\max} = y\left(\frac{V_0}{g}\right) = h + V_0 \frac{V_0}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 = h + \frac{V_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Найдем время полета тела t_1 , для этого используем тот факт, что в момент приземления координата y точки равна нулю:

$$y(t_1) = 0 \Rightarrow 0 = h + V_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}. \quad (6)$$

Решим полученное квадратное уравнение (6), получим следующие корни:

$$t_1 = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}, \quad t_1 = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}. \quad (7)$$



Второй корень t_1 не удовлетворяет условию задачи, потому что его величина отрицательная ($V_0 < \sqrt{V_0^2 + 2gh}$). Имеем время полета тела:

$$t_1 = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}. \quad (8)$$

Согласно определению, величина средней путевой скорости равна:

$$V_{cp.n} = \frac{L}{t_1} = \frac{L_1 + L_2}{t_1}, \quad (9)$$

где L – путь, пройденный телом за все время полета, L_1 – путь, пройденный до верхней точки траектории, L_2 – путь, пройденный после верхней точки траектории до падения на землю.

Из рисунка видно, что для величин L_1 и L_2 выполняются следующие равенства:

$$L_1 = y_{\max} - h, \quad L_2 = y_{\max}. \quad (10)$$

С учетом равенств (8) и (10) равенство (9) примет следующий вид:

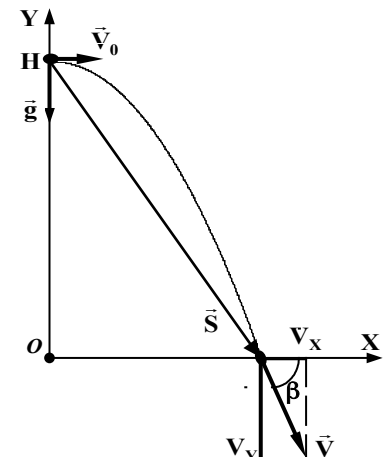
$$V_{cp.n} = \frac{\frac{V_0^2}{2g} + \frac{V_0^2}{2g} - h + h + \frac{V_0^2}{2g}}{\frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}} = \frac{g + V_0^2}{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}. \quad (11)$$

Найдем величину средней путевой скорости, для чего в равенство (11) подставляем численные значения величин h , V_0 , g

$$V_{cp.n} = \frac{10 + 2,5 + 10^2}{10 + \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2,5}} = 27,84 \frac{m}{c}.$$

Пример 6. Мальчик бросил горизонтально мяч из окна, находящегося на высоте $h = 20$ м со скоростью $V_0 = 20$ м/с. Определить: а) время полета мяча; б) величину скорости в момент приземления; в) угол между вектором скорости и горизонтальной поверхностью; г) величину перемещения за время всего полета; д) величину средней скорости за время полета.

Решение. Для решения задачи возьмем прямоугольную систему координат XOY , причем ось OX направим горизонтально, а ось OY — вверх, перпендикулярно поверхности Земли. Начало координат совместим с поверхностью Земли. Изобразим траекторию движения мяча в данной системе координат. Запишем уравнения движения по осям OX и OY , а также зависимости проекций вектора скорости на оси координат от времени:



$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}; \quad V_x(t) = V_{0x} + a_x \cdot t;$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}; \quad V_y(t) = V_{0y} + a_y \cdot t.$$

Определяем параметры, входящие в вышеприведенные соотношения:

$$x_0 = 0; \quad V_{0x} = V_0; \quad a_x = 0;$$

$$y_0 = h; \quad V_{0y} = 0; \quad a_y = -g.$$

С учетом начальных условий, запишем зависимости от времени координат и проекций вектора скорости:

$$x(t) = V_0 \cdot t; \quad V_x(t) = V_0;$$

$$y(t) = h - \frac{g \cdot t^2}{2}; \quad V_y(t) = -g \cdot t.$$

1. Определение времени полета мяча.

В момент падения мяча на поверхность Земли, его координата Y равна нулю, т.е. $y(t) = 0$. Это позволяет нам получить следующее уравнение для определения времени падения мяча:

$$y(t) = 0 \Rightarrow 0 = h - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = 2 \text{ с}.$$

2. Определение величины скорости в момент приземления мяча.

Поставив время падения мяча в зависимость от времени проекции скорости падения мяча на ось OY , получим следующее выражение:

$$V_y \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = -g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = -\sqrt{2 \cdot h \cdot g}.$$

Величину вектора скорости находим по формуле:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20} = 28,3 \text{ м/с}.$$

3. Определение угла между вектором скорости и горизонтальной поверхностью.

Искомый угол найдем по формуле (см. рис. к данной задаче):

$$\cos \beta = \frac{V_x}{|\vec{V}|} = \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}} \Rightarrow$$

$$\beta = \arccos \left[\frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}} \right] = \arccos \left[\frac{20}{28,3} \right] = 45^\circ.$$

4. Определение величины перемещения.

Определим вначале координату X мяча в момент приземления. Для этого, подставив в уравнение движения по оси OX время полета, получим выражение:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}.$$

Величину перемещения найдем по формуле $S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, где (x, y) - координаты мяча в момент приземления; (x_0, y_0) - координаты начальной точки траектории мяча. Учитывая, что $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $x = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$, $y = 0$, получим следующую формулу для вычисления величины перемещения:

$$S = \sqrt{\left(V_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot V_0^2}{g} + h^2}.$$

Поставив численные значения входящих в последнюю формулу величин, получим величину перемещения:

$$S = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 20^2}{10} + 20^2} = 44,7 \text{ м}.$$

5. Определение величины средней скорости.

Величину средней скорости найдем по формуле:

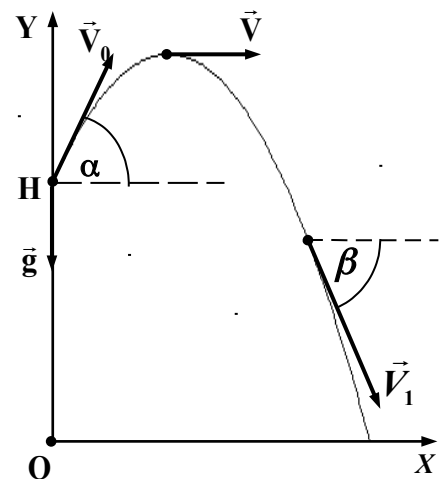
$$V_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{44,7}{2} = 22,35 \text{ м/с}.$$

Пример 7. Камень брошен с башни, имеющей высоту $H = 20 \text{ м}$, с начальной скоростью $V_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от основания башни упадет камень? Какова максимальная высота полета камня? Каково время полета камня? Каковы величина скорости $|\vec{V}_1|$ и угол β между вектором скорости и осью OX через 2 секунды полета? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Решим данную задачу в системе отсчета, связанной с Землей. Выберем систему координат XOY так, чтобы оси координат находились в плоскости траектории камня. Ось OX направим горизонтально, а ось OY — вверх, перпендикулярно OX . Начало координат совместим с основанием башни. Определим начальные координаты, проекции скорости камня и ускорения свободного падения на оси координат:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0; & V_{0x} &= V_0 \cdot \cos \alpha; & a_x &= 0; \\ y_0 &= H; & V_{0y} &= V_0 \cdot \sin \alpha; & a_y &= -g. \end{aligned}$$

С учетом полученных значений запишем уравнения движения камня и зависимость проекции скорости от времени на ось OY :



$$x(t) = x_0 + V_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \Rightarrow x(t) = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t;$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \Rightarrow y(t) = H + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2};$$

$$V_y(t) = V_{0y} + a_y \cdot t \Rightarrow V_y(t) = V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t.$$

1. **Определение времени полета камня.**

В момент падения камня на поверхность Земли его координата y равна нулю, т.е. $y(t) = 0$. Отсюда вытекает следующее уравнение для определения времени полета:

$$y(t) = 0 \Rightarrow H + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0.$$

Подставляя численные значения величин, входящих в данное уравнение, получим уравнение:

$$5 \cdot t^2 - 5 \cdot t - 20 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 4 = 0.$$

Решив данное уравнение, получим следующие корни:

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \approx 2,56 \text{ с}, \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \approx -1,56 \text{ с}.$$

Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как время полета положительно.

2. **Определение расстояния от основания башни.**

Искомое расстояние найдем из зависимости координаты x от времени, подставив в это равенство время полета:

$$x(1,618) = 10 \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,618 = 14,01 \text{ м}.$$

3. **Определение максимальной высоты полета камня.**

В верхней точке траектории движения камня вектор скорости параллелен оси OX , поэтому его проекция на ось OY равна нулю, т.е. $V_y = 0$. Из этого условия определяем момент времени, когда камень находился в верхней точке:

$$V_y(t) = 0 \Rightarrow 0 = V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \Rightarrow t = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

Подставив полученное значение времени в уравнение движения тела по си OY , получим максимальную высоту подъема:

$$\begin{aligned} h_{\max} &= y \left[\frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right] = H + V_0 \cdot \sin \alpha \cdot \left[\frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right] - \frac{g}{2} \cdot \left[\frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{g} \right]^2 = \\ &= H + \frac{(V_0 \cdot \sin \alpha)^2}{2 \cdot g} = 20 + \frac{(10 \cdot 0,5)^2}{2 \cdot 10} = 21,25 \text{ м}. \end{aligned}$$

4. **Определение величины вектора скорости $|\vec{V}_1|$ и угла β между вектором скорости и осью OX через 2 секунды полета.**

Величина вектора скорости находится по проекциям данного вектора на оси координат, согласно следующей зависимости:

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(V_0 \cdot \cos \alpha)^2 + (V_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t)^2}.$$

В последнее выражение подставляем вместо времени 2 с и заданные величины V_0 и g , получим искомую величину скорости

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{(10 \cdot \cos 30^\circ)^2 + (10 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot 2)^2} = 17,3 \text{ м/с}.$$

Величину угла β между вектором скорости $|\vec{V}_1|$ и осью OX вычисляем по проекции и величине данного вектора из следующего соотношения:

$$\cos \beta = \frac{V_{1x}}{|\vec{V}_1|} \Rightarrow \beta = \arccos \left[\frac{V_{1x}}{|\vec{V}_1|} \right] = \frac{10 \cdot \cos 30^\circ}{\sqrt{(10 \cdot \cos 30^\circ)^2 + (10 \cdot \sin 30^\circ - 10 \cdot 2)^2}} \approx 60^\circ.$$

§1.3. «Естественный» способ описания движения

Этот способ описания движения применяют в том случае, когда траектория движения точки заранее известна. Положение точки на траектории задают дуговой координатой ξ (кси)¹. На траектории стрелкой указывают положительное направление дуговой координаты. Уравнением движения является зависимость координаты ξ от времени, т.е.:

$$\xi = f(t) \quad (1.17)$$

Скорость точки. Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, связанный с движущейся точкой A и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты ξ (см. рис. 1.3). Вектор $\vec{\tau}$ при движении точки изменяет свое направление, и, следовательно, не является постоянным вектором. Вектор мгновенной скорости \vec{V} связан с ортом $\vec{\tau}$ соотношением:

$$\vec{V} = V_\tau \cdot \vec{\tau}, \quad (1.18)$$

где V_τ - проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$ и равна производной от дуговой координаты по времени, т.е.:

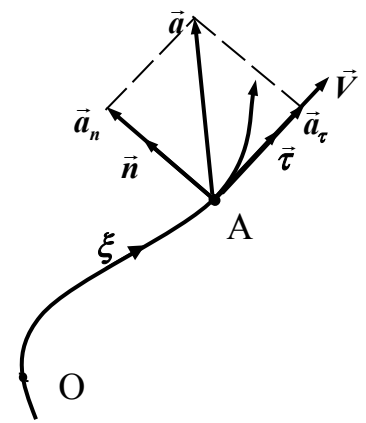


Рис. 1.3

^{1*} Дуговая координата алгебраическая величина, численно равная пройденному пути точкой.

$$V_{\tau} = \frac{d\xi}{dt}. \quad (1.19)$$

Ускорение точки. Вектор полного ускорения точки находят дифференцированием равенства (1.17) по времени, в результате чего получают равенство:

$$\vec{a} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}, \quad (1.20)$$

где $\frac{dV_{\tau}}{dt}$ - производная от проекции вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$ по времени, \vec{n} - единичный вектор нормали, а ρ - радиус кривизны траектории в точке A . Первое слагаемое в правой части (1.20) это составляющая вектора полного ускорения на направление вектора $\vec{\tau}$, называемая тангенциальным ускорением, т.е.:

$$\vec{a}_{\tau} = a_{\tau} \cdot \vec{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \vec{\tau}, \quad (1.21)$$

где $a_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt}$ - проекция тангенциального ускорения на направление вектора $\vec{\tau}$.

Тангенциальное ускорение показывает, как быстро меняется величина вектора скорости со временем.

Второе слагаемое в правой части равенства (1.20) представляет собой составляющую вектора полного ускорения, направленную на направление вектора нормали \vec{n} , и называется нормальным ускорением. *Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.* Величина нормального ускорения находится по формуле:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.22)$$

Модуль вектора полного ускорения находится по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}. \quad (1.23)$$

Движение с постоянным по величине тангенциальным ускорением описывается уравнением:

$$\xi(t) = \xi_0 + V_{0\tau} \cdot t + \frac{a_{\tau} \cdot t^2}{2}, \quad (1.24)$$

Зависимость проекции скорости от времени:

$$V_{\tau}(t) = V_{0\tau} + a_{\tau} \cdot t \quad (1.25)$$

где ξ_0 - величина дуговой координаты в начальный момент времени, V_{τ} - проекция вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$, a_{τ} - тангенциальное ускорение.

Правило знаков. Величина V_{τ} положительная, если точка движется в направлении вектора $\vec{\tau}$ (или в направлении возрастания дуговой координаты ξ), в противном случае, величина V_{τ} отрицательная. Знаки V_{τ} и a_{τ}

совпадают при ускоренном движении, при замедленном движении – знаки противоположны.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем сущность «естественного» способа описания движения?
2. Каким соотношением определяется вектор мгновенной скорости? Как определяется знак проекции скорости V_τ на направление вектора $\vec{\tau}$?
3. В чем физический смысл тангенциального ускорения? Как по отношению к вектору скорости направлен вектор тангенциального ускорения при ускоренном и замедленном движениях?
4. В чем физический смысл нормального ускорения? Как по отношению к вектору скорости направлен вектор нормального ускорения?
5. Каким соотношением связана величина полного ускорения с величинами нормального и тангенциального ускорений?
6. Какое соотношение является уравнением движения в «естественном» способе описания движения?
7. Каким соотношением устанавливается зависимость от времени проекции вектора скорости на направление вектора $\vec{\tau}$?

Примеры решения задач

Пример 9. Движение точки по окружности радиуса $\rho = 8 \text{ м}$ задано уравнением $\xi = A + B \diamond + C \diamond^2$, где ξ – дуговая координата, $A = 20$, $B = 4 \text{ м/с}$, $C = -3 \text{ м/с}^2$. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $t = 3 \text{ с}$.

Решение. В данной задаче движение точки описывается «естественным» способом. Зная зависимость дуговой координаты ξ , найдем выражение для скорости как производную от этой координаты по времени:

$$V_\tau = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt}(A + B \diamond + C \diamond^2) = B + 2 \diamond C.$$

$$\text{При } t = 3 \text{ с имеем } V_\tau = 4 + 2 \diamond C = 4 + 2 \diamond (-3) = -14 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В данном способе описания движения скорость является алгебраической величиной. Отрицательный ее знак указывает на то, что вектор скорости в данный момент направлен против орта $\vec{\tau}$. Вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты ξ .

Тангенциальное ускорение найдем, взяв производную от скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(B + 2 \diamond C) = 2 \diamond C = -6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Очевидно, что вектор тангенциального ускорения направлен в ту же сторону, что и вектор скорости, а именно против орта $\vec{\tau}$.

Нормальное ускорение точки связано со скоростью движения точки и радиусом окружности соотношением $\mathbf{a}_n = \frac{V_\tau^2}{\rho}$. Подставим сюда найденное значение скорости и заданное значение радиуса окружности и произведем вычисления:

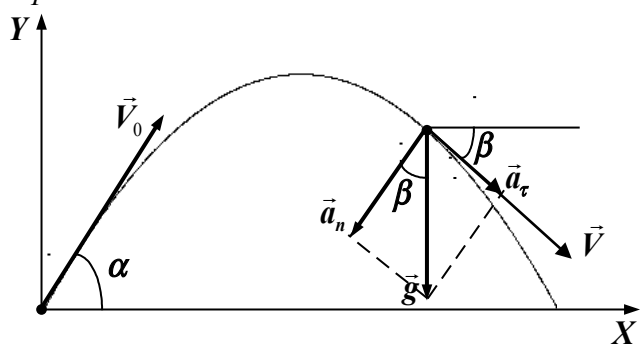
$$\mathbf{a}_n = \frac{(-14)^2}{8} = 24,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Полное ускорение является геометрической суммой векторов $\vec{\mathbf{a}}_n$ и $\vec{\mathbf{a}}_\tau$: $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_n + \vec{\mathbf{a}}_\tau$. Модуль ускорения равен $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\mathbf{a}_n^2 + \mathbf{a}_\tau^2}$. Подставив в это выражение найденные значения \mathbf{a}_n и \mathbf{a}_τ , получим величину полного ускорения точки:

$$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{24,5^2 + (-6)^2} = 25,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Пример 10. Тело брошено со скоростью $V_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Определить: а) величину скорости; б) нормальное ускорение; в) тангенциальное ускорение; г) радиус кривизны траектории через $t = 1 \text{ с}$ после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. В данной задаче пренебрегаем размерами тела. Рассматриваем его движение как движение точки с постоянным ускорением, равным $\vec{\mathbf{g}}$. Записываем зависимости проекций вектора скорости от времени на оси декартовой системы координат



$$V_x(t) = V_{0x} + a_x \quad (1)$$

Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0 \cos \alpha; \\ V_{0y} &= V_0 \sin \alpha; \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_x = g \cos 90^\circ = 0;$$

С учетом полученных соотношений (2), равенства (1) примут вид:

$$\begin{aligned} V_x(t) &= V_0 \cos \alpha, \\ V_y(t) &= V_0 \sin \alpha - g. \end{aligned} \quad (3)$$

Величина вектора скорости связана с проекциями соотношением:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (4)$$

Из соотношений (3), вместо проекций V_x и V_y подставляем в равенство (4), имеем следующее соотношение:

$$V = \sqrt{(V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - g t)^2}. \quad (5)$$

Из формулы (5), находим величину вектора скорости при $t = 1$ с:

$$V = \sqrt{(10 \cos 45^\circ)^2 + (10 \sin 45^\circ - 10 \cdot 1)^2} = 7,65 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Из рисунка видно, что величины нормального ускорения и ускорения свободного падения связаны соотношением

$$a_n = g \cos \beta, \quad (6)$$

$$\text{где } \cos \beta = \frac{V_x}{V} = \frac{V_0 \cos \alpha}{V}.$$

Находим величину нормального ускорения в момент времени $t = 1$ с

$$a_n = g \cos \beta = g \frac{V_0 \cos \alpha}{V} = 10 \frac{10 \cos 45^\circ}{7,65} = 9,24 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тангенциальное ускорение при $t = 1$ с вычислим по формуле:

$$a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = \sqrt{10^2 - 9,24^2} = 3,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Радиус кривизны траектории в момент времени $t = 1$ с связан с величинами скорости и нормального ускорения соотношением:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

$$\text{Откуда } \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{7,65^2}{9,24} = 6,33 \text{ м}.$$

§1.4. Кинематика твердого тела. Поступательное движение.

К поступательному типу движения относят движения тел, при которых любая прямая, связанная с телом, остается параллельной самой себе в процессе всего движения. Примерами такого движения служат движение поезда по прямому участку пути, движение кабины колеса обозрения и др. При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые траектории, поэтому в любой момент времени перемещения, скорости и ускорения точек одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения тела к изучению движения какой-либо его точки, применив для этого либо векторный, либо координатный способы описания движения.

§1.5. Вращение тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси, траектории движения всех точек тела представляют собой окружности с центрами, лежащими на оси вращения. Это позволяет описать движение какой либо одной точки тела, поскольку движение остальных точек является подобным. Для описания вращательного движения точки используют *полярную систему координат*, в которой положение точки задается координатами: углом φ между радиус-вектором $\vec{\rho}$, проведенным из начала отсчета (точка O_1) и полярной осью O_1P и радиус-вектором \vec{r} (см. рис. 1.4). Начало отсчета O_1 совмещают с центром вращения точки, при таком выборе точки O_1 будет меняться только угол поворота. Используют при этом псевдо вектор угла $\vec{\varphi}$, который по величине равен углу φ , измеренному в радианах. Направление вектора $\vec{\varphi}$ определяется *по правилу буравчика*. Вращаем буравчик от полярной оси O_1P в направлении радиус-вектора $\vec{\rho}$, при этом поступательное движение буравчика указывает на направление вектора $\vec{\varphi}$.

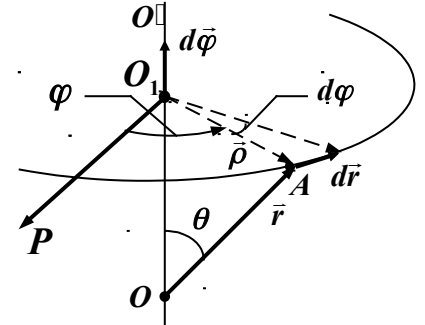


Рис. 1.4

Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt , твердое тело повернулось вокруг оси OO_1 на угол $d\varphi$ (см. рис. 1.4). Вектор радиуса вращения обозначим $\vec{\rho}$, радиус-вектор точки A — \vec{r} , а перемещение некоторой точки A твердого тела — $d\vec{r}$.

Вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$ называется вектор, направленный по оси вращения, а его величина равна углу поворота $d\varphi$, измеренному в радианах. *Направление вектора $d\vec{\varphi}$ определяют по правилу буравчика*. Вращая буравчик по направлению вращения точки, при этом направление его поступательного движения укажет направление вектора угла поворота $d\vec{\varphi}$.

Из рисунка 1.4 видно, что величина бесконечно малого перемещения $|d\vec{r}|$ и угол поворота $d\varphi$ связаны соотношением

$$|d\vec{r}| = r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi. \quad (1.26)$$

Справедливо так же и векторное равенство:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{\rho}. \quad (1.27)$$

Для характеристики быстроты изменения угла поворота вводят понятие вектора угловой скорости. *Угловая скорость есть производная от угла поворота по времени:*

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.28)$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения, его направление совпадает с направлением вектора бесконечно малого поворота $d\vec{\varphi}$.

Вектор углового ускорения характеризует быстроту изменения вектора угловой скорости, и находится как производная от вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.29)$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора бесконечно малого изменения угловой скорости $d\vec{\omega}$. При ускоренном характере вращения тела направление вектора углового ускорения совпадает с направлением векторов бесконечно малого угла поворота и угловой скорости, при замедленном характере вращения вектор углового ускорения направлен против вектора угловой скорости.

Уравнением вращения тела вокруг неподвижной оси является зависимость вектора угла поворота от времени:

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{f}(t).$$

При решении задач используется проекция этого равенства на ось вращения (ось OZ). Ось OZ направляют по вектору угла поворота.

Примеры уравнений вращения тела вокруг неподвижной оси

1. Равномерное вращение тела ($\vec{\omega} = \overline{\text{const}}$):

$$\varphi_z(t) = \varphi_{0z} + \omega_z t, \quad (1.30)$$

где φ_0 - величина угла поворота в начальный момент времени, ω - величина вектора угловой скорости.

2. Вращение с постоянным угловым ускорением ($\vec{\varepsilon} = \overline{\text{const}}$):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_{0z} \cdot t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}, \\ \Delta\varphi &= \varphi(t) - \varphi_0 = \omega_{0z} \cdot t + \frac{\varepsilon_z \cdot t^2}{2}, \\ \Delta\varphi &= \frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2 \cdot \varepsilon_z}, \\ \Delta\varphi &= \frac{\omega_z + \omega_{0z}}{2} \cdot t. \end{aligned} \quad (1.31)$$

где ε_z - проекция вектора углового ускорения на ось OZ.

Зависимость угловой скорости от времени:

$$\omega_z(t) = \omega_{0z} + \varepsilon_z \cdot t. \quad (1.32)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Какая система координат используется для описания движения точки по окружности? Какими координатами задается положение вращающейся точки на плоскости?

2. Сформулируйте определение псевдовектора угла поворота. Как определяется величина и направление этого вектора?

3. Дайте определение вектора угловой скорости. Как определяется направление данного вектора?

4. Дайте определение вектора углового ускорения. Как связаны между собой направления векторов угловой скорости и углового ускорения при ускоренном и замедленном движениях?

5. Какова зависимость угла φ_z от времени при равномерном движении точки по окружности?

6. Какими соотношениями описывается движение точки с постоянным угловым ускорением по окружности?

§1.6. Связь между линейными и угловыми величинами

Модуль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и изменение угла поворота $\Delta\varphi$ связаны соотношением:

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}| \cdot \sin\theta \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} = |\vec{\rho}| \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (1.33)$$

где \vec{r} - радиус-вектор точки A , $\vec{\rho}$ - ее радиус вращения (см. рис. 1.4).

Вектор линейной скорости \vec{V} и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ связаны векторным равенством:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (1.34)$$

В скалярном виде справедливо равенство:

$$|\vec{V}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\theta = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\rho}|. \quad (1.35)$$

Для вектора полного ускорения \vec{a} справедливы соотношения (1.20)–(1.23), и, кроме того, имеем следующее векторное равенство:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (1.36)$$

где $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вектор тангенциального ускорения, $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ - вектор нормального ускорения.

Проекции вектора \vec{a} на орты $\vec{\tau}$ и \vec{n} (см. рис. 1.3) равны:

$$a_\tau = \varepsilon_z \cdot \rho, \quad a_n = \omega^2 \cdot \rho. \quad (1.37)$$

Модуль полного ускорения равен:

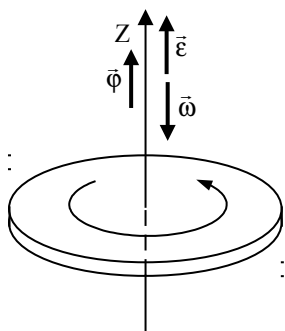
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.38)$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Каким соотношением связаны между собой линейная и угловая скорость точки?
2. Каким соотношением связаны между собой угловое ускорение точки с ее тангенциальным ускорением?
3. Каким соотношением связаны между собой угловая скорость точки с ее нормальным ускорением?

Примеры решения задач

Пример 11. Диск радиусом $r = 20$ вращается согласно уравнению $\varphi = A + B \cdot t + C \cdot t^2$, где $A = 3 \text{ рад}$, $B = -1 \text{ рад/с}$, $C = 0,05 \text{ рад/с}^2$. Определить угловую скорость, угловое, тангенциальное, нормальное и полное ускорение точки, находящейся на краю диска, в конце двадцатой секунды его вращения. Изобразить на рисунке векторы угловой скорости и углового ускорения.



Решение. Находим проекции векторов угловой скорости и углового ускорения из следующих соотношений:

$$\omega_z(t) = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d}{dt}(3 - 1 \cdot t + 0,05 \cdot t^2) = -1 + 0,1 \cdot t,$$

$$\varepsilon_z(t) = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}(-1 + 0,1 \cdot t) = 0,1.$$

Из последнего соотношения видно, что проекция углового ускорения не зависит от времени, следовательно, это движение с постоянным угловым ускорением. Из первого соотношения находим величину проекции угловой скорости через 20 с движения. $\omega_z(20) = -1 + 0,1 \cdot 20 = -1 \text{ рад/с}$.

Для построения векторов угла поворота, угловой скорости и углового ускорения выбираем ось OZ , используем при этом правило «буравчика». Учитывая знаки проекций векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$, изображаем их на рисунке. Поскольку направление векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ противоположное, делаем вывод о том, что движение точки является равнозамедленным.

Из соотношений (1.37)–(1.38) находим нормальное, тангенциальное и полное ускорения:

$$a_n = \omega^2 \cdot r = 1^2 \cdot 0,2 = 0,2 \text{ м/с}^2 ;$$

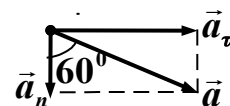
$$a_\tau = \varepsilon \cdot r = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м/с}^2 ;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,02^2} \approx 0,2 \text{ м/с}^2 .$$

Пример 12. По дуге окружности радиусом $\rho = 10 \text{ м}$ движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 10 \text{ м/с}^2$; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол 60° . Найти линейную и угловую скорость, тангенциальное и угловое ускорение точки.

Решение. Для нахождения величины вектора скорости воспользуемся следующим соотношением:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow V = \sqrt{a_n \cdot \rho} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10 \text{ м/с} .$$



Для вычисления угловой скорости используем соотношение (1.37)

$$\omega = \frac{V}{\rho} = \frac{10}{10} = 1 \text{ рад/с} .$$

Из рисунка к данной задаче вытекает соотношение, позволяющее вычислить величину вектора тангенциального ускорения

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{a_\tau}{a_n} \Rightarrow a_\tau = a_n \cdot \text{tg } 60^\circ = 10 \cdot \text{tg } 60^\circ \approx 17,3 \text{ м/с}^2 .$$

Для вычисления углового ускорения точки используем соотношение (1.35)

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{\rho} = \frac{17,3}{10} = 1,73 \text{ рад/с}^2 .$$

§1.7. Плоское движение твердого тела

Плоское движение – такое движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях неподвижных в некоторой системе отсчета.

Примером плоского движения служит качение цилиндра по плоскости. Такое движение твердого тела можно представить как результат сложения двух движений, поступательного и вращательного.

Выберем две системы отсчета K и K' (см. рис. 1.5). Пусть система K' , связанная жестко с точкой O' твердого тела движется поступательно относительно системы K (см. рис 1.5).

При плоском движении тела его положение в процессе движения определяется положением такого сечения тела Φ , которое лежит в плоскости траектории P некоторой точки A .

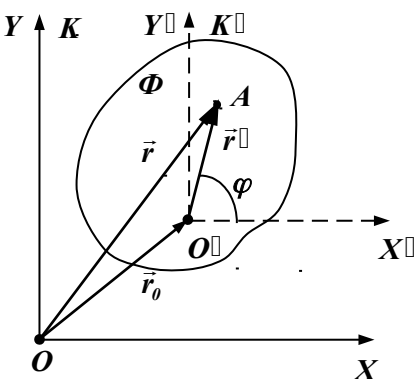


Рис. 1.5

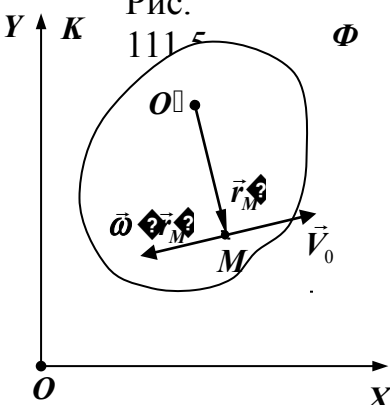


Рис. 1.6

Положение сечения Φ в системе отсчета K определяется радиус-вектором \vec{r}_0 произвольной ее точки $O\blacktriangleleft$ и углом φ между осью $O\blacktriangleleft$ и вектором $\vec{r}\blacktriangleleft$ точки A .

Заметим, что для абсолютно твердого тела модуль вектора $\vec{r}\blacktriangleleft$ не зависит от времени (вектор $\vec{r}\blacktriangleleft$ может только вращаться). Поэтому движение рассматриваемого сечения Φ в системе K описывается уравнениями:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (1.39)$$

Для точки A рассматриваемого сечения векторы \vec{r} и $\vec{r}\blacktriangleleft$ в системах отсчета K и $K\blacktriangleleft$ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\blacktriangleleft, \quad (1.40)$$

Для бесконечно малых перемещений имеем равенство:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}\blacktriangleleft, \quad (1.41)$$

где $d\vec{r}$ – перемещение точки A в системе K , $d\vec{r}\blacktriangleleft$ перемещение точки A в системе $K\blacktriangleleft$, $d\vec{r}_0$ – перемещение начала отсчета (точка $O\blacktriangleleft$) системы $K\blacktriangleleft$ относительно K .

Скорость точки A в системе отсчета K и угловая скорость ее в системе $K\blacksquare$ связаны соотношением:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\blacksquare. \quad (1.42)$$

Из (1.42) видно, что скорость любой точки рассматриваемого сечения складывается из скорости поступательного движения \vec{V}_0 произвольной точки $O\blacksquare$ этого сечения и линейной скорости $\vec{V}\blacksquare = \vec{\omega} \times \vec{r}\blacksquare$, обусловленной вращением вектора $\vec{r}\blacksquare$ вокруг точки $O\blacksquare$.

Очевидно, что векторы \vec{V} и $\vec{V}\blacksquare$ лежат в плоскости сечения Φ . Следовательно, можно найти такую точку M (не обязательно принадлежащую данному телу), линейная скорость которой в системе K равна нулю. Это достигается тогда, когда $\vec{V}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{r}_M\blacktriangleleft$ (см. рис. 1.6).

Ось, перпендикулярная сечению Φ и проходящая через точку M , называют мгновенной осью вращения. В этом случае плоское движение тела сводится к чисто вращательному движению вокруг мгновенной оси.

§1.8. Скорости и ускорения в различных системах отсчета

Обычно на практике механическое движение какого-то тела могут изучать несколько наблюдателей, находящихся в различных системах отсчета. В связи с этим возникает необходимость в сравнении

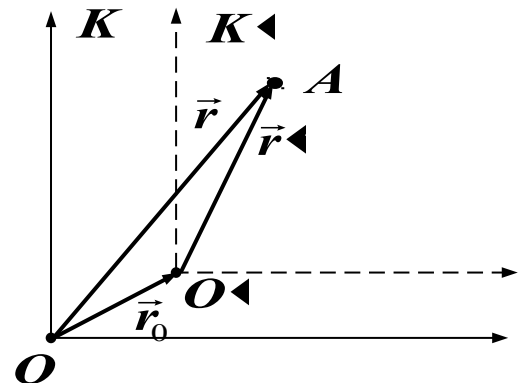


Рис. 1.7

результатов, полученных в различных системах отсчета. И, кроме того, от выбора системы отсчета зависит объем вычислений при решении практических задач.

Заметим, что ниже приведенные соотношения справедливы для скоростей движения значительно меньших скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$).

Постановка задачи. Имеются две произвольные системы отсчета K и K' , движущиеся относительно друг друга. Известны скорость \vec{V} и ускорение \vec{a} точки A в K – системе. Каковы значения величин \vec{V}' и \vec{a}' в K' системе.

Рассмотрим три наиболее важных случая движения одной системы отсчета относительно другой.

1. K' система движется поступательно по отношению K – системе.

Пусть положение движущейся точки A в K – системе определяется радиус–вектором \vec{r} , а в K' системе — радиус–вектором \vec{r}' (см. рис. 1.7). K' система движется поступательно относительно K – системы. Положение начала отсчета K' системы (точка O') определяет радиус–вектор \vec{r}_0 .

Очевидно что, векторы \vec{r} и \vec{r}' связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (1.43)$$

Для бесконечно малых перемещений $d\vec{r}$ и $d\vec{r}'$ точки A соответственно в K и K' системах справедлива формула:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad (1.44)$$

Скорости точки A (\vec{V} и \vec{V}') в K и K' системах связаны следующим соотношением:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}' \quad (1.45)$$

где \vec{V}_0 – скорость K' системы относительно K – системы.

Для ускорений имеем равенство:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' \quad (1.46)$$

где \vec{a} , \vec{a}' ускорение точки A в K и K' системах соответственно, \vec{a}_0 – ускорение K' системы относительно K – системы.

Из соотношений (1.44)—(1.46) следует, что перемещение, скорость и ускорение точки A , в общем, зависят от выбора системы отсчета, т.е. не являются инвариантными величинами для различных систем отсчета.

Однако, в том случае, когда K' система движется поступательно с постоянной скоростью ($\vec{V}_0 = \overline{const}$), ее ускорение $\vec{a}_0 = \vec{0}$, и, следовательно,

имеем равенство:

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (1.47)$$

В этом случае ускорение точки A постоянно в K и K' системах. Полученный вывод очень важен, поскольку позволяет установить критерий, согласно которому можно выбирать такие системы отсчета, в которых величины ускорений движущейся точки не зависят от системы отсчета. Этому критерию удовлетворяют, как мы позднее убедимся, инерциальные системы² отсчета.

2. K' система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в K – системе.³ Совместим K и K' системы, начало отсчета возьмем на оси вращения. В этом случае, в начальный момент времени радиус–вектор точки A можно выбрать одинаковым в K и K' системах ($\vec{r} = \vec{r}'$). Пусть \vec{V} и \vec{V}' скорости точки A в K и K' системах,

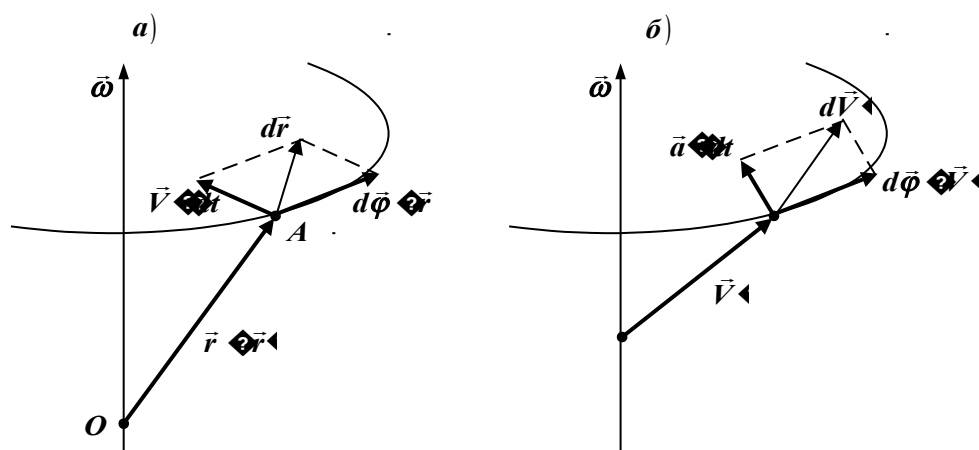


Рис.

1.8

тогда перемещение этой точки в K' системе равно $\vec{V}' dt$, а перемещение K' системы относительно K — $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ (см. рис. 1.8). При этом угол поворота K' системы за время dt равен $d\vec{\varphi}$.

Перемещение точки A в K – системе равно:

$$d\vec{r} = \vec{V} dt + d\vec{\varphi} \times \vec{r} \quad (1.48)$$

Соотношение для скоростей \vec{V} и \vec{V}' в K и K' системах имеет вид:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.49)$$

Ускорения \vec{a} и \vec{a}' в K и K' системах связаны соотношением:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{V}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.50)$$

² В инерциальных системах отсчета величина ускорения точки зависит только от сил, действующих на нее.

³ Материал для дополнительного изучения

Второе слагаемое в равенстве (1.50) называют *кориолисовым ускорением*, а третье слагаемое — *осестремительным ускорением*:

$$\vec{a}'_{кор} = 2 \vec{\omega} \times \vec{V}, \quad \vec{a}_{ос} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (1.51)$$

Пусть $\vec{\rho}$ — вектор, проведенный в точку A перпендикулярно оси вращения, тогда равенство (1.50) примет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + 2 \vec{\omega} \times \vec{V} + \omega^2 \vec{\rho}. \quad (1.52)$$

Для определения направления вектора $\vec{a}'_{кор}$, используют равенство (1.51) и правило буравчика, осестремительное ускорение направлено против вектора $\vec{\rho}$ к оси вращения K системы.

3. K система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью \vec{V}_0 относительно K — системы.⁴

Пусть \vec{V}_0 скорость поступательного движения точки O , являющейся точкой отсчета K системы, а $\vec{\omega}$ вектор угловой скорости вращения K системы. Этот случай объединяет два предыдущих.

Для векторов скорости \vec{V} и \vec{V}' точки в K и K системах справедлива формула:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (1.53)$$

где все обозначения описаны ранее в пункте 2.

Ускорения точки A в K и K системах (\vec{a}, \vec{a}') удовлетворяют следующему соотношению:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2 \vec{\omega} \times \vec{V}' + \omega^2 \vec{\rho}. \quad (1.54)$$

Следует заметить, что все обозначения величин, входящих в соотношения (1.53)–(1.54), описаны ранее в пункте 2.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если K система движется поступательно по отношению K — системе?

⁴ Материал для дополнительного изучения

2. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если $K \diamond$ система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в K – системе?

3. Какими соотношениями связаны между собой перемещения, линейная скорость и ускорение движущейся точки, если $K \diamond$ система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью \vec{V}_0 относительно K – системы?

4. По какой формуле находится величина осестремительного ускорения? Куда направлен вектор осестремительного ускорения?

5. По какой формуле находится величина ускорения Кориолиса? По какому правилу определяется направление вектора ускорения Кориолиса?

Примеры решения задач

Пример 13. Два велосипедиста движутся по прямолинейному участку шоссе равномерно. Первый велосипедист имеет скорость относительно Земли 10 м/с, второй — 8 м/с. Определить скорость первого велосипедиста относительно второго. Рассмотреть различные случаи направления скоростей движения велосипедистов.

Решение. Для решения задачи K – систему связываем с поверхностью Земли, а $K \square$ – систему — со вторым велосипедистом. Обозначим скорость первого велосипедиста в K – системе \vec{V}_1 , а в $K \square$ – системе — \vec{V}_{12} , а скорость $K \square$ – системы относительно K – системы \vec{V}_2 .

Рассмотрим первый случай. Пусть велосипедисты движутся навстречу друг другу. Для того чтобы определить скорость первого велосипедиста относительно второго, выразим вектор скорости \vec{V}_{12} из закона сложения скоростей, будем иметь следующее векторное равенство:

$$\vec{V}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2. \quad (1)$$

Для того чтобы получить равенство для проекций векторов, входящих в последнее равенство, выберем систему отсчета следующим образом. Направим ось OX по направлению движения первого велосипедиста. Тогда вектор скорости второго велосипедиста в данной системе отсчета будет направлен против оси OX (см. рис.). Используя основное свойство векторных равенств, получим равенство для проекций векторов скоростей, входящих в векторное равенство (1):

$$V_{12x} = V_{1x} - V_{2x} = |\vec{V}_1| - (-|\vec{V}_2|) = |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2| = 10 + 8 = 18 \text{ м/с.}$$

Из данного равенства видно, что проекции вектора скорости движения первого велосипедиста относительно второго имеют положительный знак, следовательно, вектор этой скорости направлен ко второму велосипедисту, т.е. они сближаются.

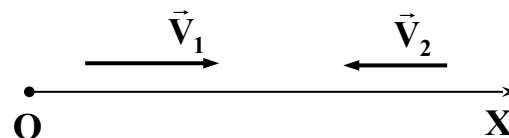


Рис. а.

Рассмотрим второй случай. Пусть векторы скоростей велосипедистов направлены так, как показано на рис. б. Запишем равенство для проекций векторов, входящих в векторное равенство (1), получим следующее выражение:

$$V_{12x} = V_{1x} - V_{2x} = |\vec{V}_1| - |\vec{V}_2| = 10 - 8 = 2 \text{ м/с.}$$

В данном случае знак проекции скорости \vec{V}_{12} также положительный, т.е. велосипедисты сближаются.

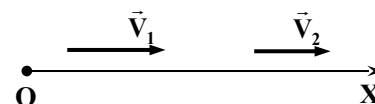


Рис. б.

Рассмотрим третий случай. Пусть векторы скоростей велосипедистов направлены так, как показано на рис. в. Запишем равенство для проекций векторов, входящих в векторное равенство (1), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} V_{12x} &= V_{1x} - V_{2x} = (-|\vec{V}_1|) - (-|\vec{V}_2|) = \\ &= -|\vec{V}_1| + |\vec{V}_2| = -10 + 8 = -2 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

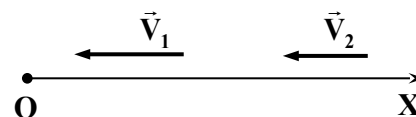


Рис. в.

Знак проекции скорости \vec{V}_{12} отрицательный, следовательно, вектор скорости \vec{V}_{12} направлен против оси OX, т.е. вектор скорости \vec{V}_{12} направлен не ко второму велосипедисту, а от него. В этом случае велосипедисты удаляются друг от друга.

Варианты заданий для практических занятий

Вариант №1
⊕ ⊕ Задача №1. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = A \cdot (\vec{i} \cdot \cos \omega t + \vec{j} \cdot \sin \omega t)$, где $A = 0,5 \text{ м}$, $\omega = 5 \text{ рад/с}$. Найти уравнение траектории. Начертить траекторию движения точки. Найти выражение $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для $t = 1 \text{ с}$ вычислить: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.
⊕ ⊕ Задача №2. Тело брошено с балкона вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Высота балкона над поверхностью земли равна 12,5 м. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость с момента бросания до момента падения на землю.
⊕ ⊕ Задача №3. Мяч брошен со скоростью $V_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. На какую высоту поднимется мяч? На каком расстоянии от места бросания он упадет на землю? Какое время он будет в движении?
⊕ ⊕ Задача №4. Точка движется по окружности радиусом 2м согласно уравнению $\xi(t) = A + B \cdot t^3$, где $B = 4 \text{ м/с}^3$. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Определить полное ускорение в этот момент.
⊕ ⊕ Задача №5. Камень брошен с высокой башни в горизонтальном направлении с начальной скоростью 40м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения камня в момент $t = 2 \text{ с}$ после начала движения.
⊕ ⊕ Задача №6. Диск радиусом 20см вращается согласно уравнению $\varphi(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^3$, где $A = 3 \text{ рад}$, $B = -1 \text{ рад/с}$, $C = 0,1 \text{ рад./с}^3$. Определить угловую скорость, угловое, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точек на окружности диска для момента времени равного 10с.
⊕ ⊕ ⊕ Задача №7. Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем t по закону $\vec{r}(t) = c \cdot t \cdot \vec{i} + f \cdot t^2 \cdot \vec{j}$, где c и f – постоянные, \vec{i}

и \vec{j} – орты осей X и Y . Найти: а) уравнение траектории точки $u(x)$; изобразить ее график; б) зависимость от времени вектора скорости, ускорения и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами скорости и ускорения.